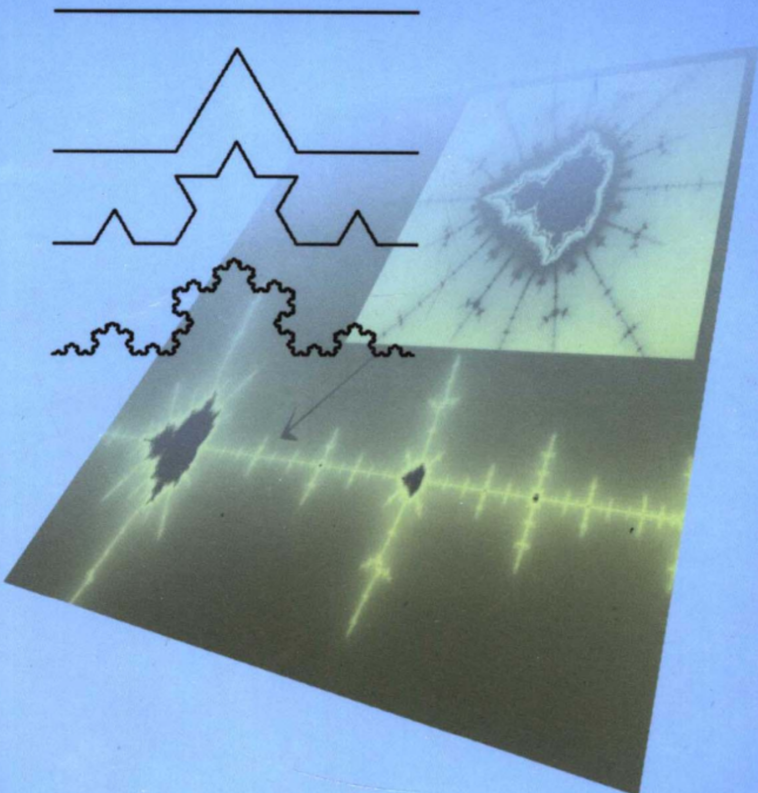
分形几何学

陈颙 陈凌 编著



地震出版社

内 容 提 要

本书为分形几何普及教材。它是作者在中国科学院研究生院多年讲授分形几何的讲稿的基础上，为适应广大读者需要改编而成的。本书富有特色，主线鲜明，注重概念，对分形几何的基础、分析计算方法和应用实例均做了介绍，内容并不局限于某专业，适用面广。

本书语言简练，结构清晰，突出介绍了许多有代表意义的分形实例及小波理论在分形中的应用，并给出一些典型分形计算程序。书中带有习题，可以方便读者自学。并介绍了一套分形几何软件，读者可到书上提供的网站上下载。本书可供高等院校大学生、研究生学习参考，也适合对分形理论与方法感兴趣的读者阅读。

责任编辑／刘晶海
封面设计／邢秀芬

ISBN 7-5028-2633-5/P·1229
(3262) 定价：36.00元

分形几何学

陈 颙 陈 凌 编著

地 震 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

分形几何学/陈颙，陈凌编著. 一北京：地震出版社，2005.2

ISBN 7-5028-2633-5

Ⅰ.分… Ⅱ.①陈…②陈… Ⅲ.分形几何—教材 Ⅳ.0189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 003823 号

地震版 XT200400336

分形几何学

陈 颙 陈 凌 编著

责任编辑：刘晶海

责任校对：张晓梅

出版发行：地震出版社

北京民族学院南路 9 号 邮编：100081

发行部：68423031 68467993 传真：88421706

门市部：68467991 传真：68467991

总编室：68462709 68423029 传真：68467972

E-mail：seis@ht.rol.cn.net

经销：全国各地新华书店

印刷：北京鑫丰华彩印有限公司

版（印）次：2005 年 2 月第 2 版 2005 年 2 月第一次印刷

开本：787×1092 1/16

字数：263 千字

印张：18.25

印数：0001～1000

书号：ISBN 7-5028-2633-5/P·1229（3262）

定价：36.00 元

序

复杂性一直是各种学科面临的共同问题之一。

传统科学能准确地预测日食、月食的出现和行星的碰撞，但科学家们也同时发现：世界上没有两次台风的途径是完全一样的，没有两次厄尔尼诺现象的过程完全是一样的，也没有两次地震所表现出的前兆是一样的。事物本质上的复杂性问题，仿佛到了20世纪末才被人们重视起来。传统科学上的难题，只有靠不断创新来解决。

描述复杂现象的一个引人注目的动态，就是分形几何的出现。复杂现象的背后往往存在着一些简单的规律；反过来，利用简单的规则，外加一些灵活的约束，可以产生出万花筒般千变万化的复杂现象。

由Mandelbrot这位奇才倡议的分形几何，成为了众多学科的热门话题。分形几何像一个魔术师，似乎给众多的复杂现象找到了简单的普适性的答案。于是，无数的论文、专著、期刊像雪片般问世了，其中不乏创新之作，但也混杂了不少赶时髦的作品。今天，分形几何的发展已不像前10年了，它正处于一个十字路口，有可能发展，也有可能衰亡。本书就是在这个时期写的一本科普教科书。

已经出版了许多关于分形的书，读者可以在本书后的参考书目中找到。但本书的目的，则是希望在深入与普及、发展与衰亡中开辟一条出路，把这个严肃的问题提交给广大读者。

自从20世纪90年代开始，我在中国科学院研究生院（北京）讲授了“分形几何”的研究生课程。由于不断更新讲稿，文献看了不少，同意的却不多，自行其是，有不少怪异的观点。如果说一本书也有其关键词的话，则这本书的关键词一是分形与演化（迭代函数与各种演化过程）；二是有限样本的统计分形。在这两个方面，书中记录了我在研究工作中的体会和教训。

1998年地震出版社曾出版了《分形几何学》一书，最初的设想是用来作为研究生的教材和参考书，但实际的读者面则远远超出了研究生

的范围，很快这本书就用完了。这次出版，在原来的基础上作了较大的改动。一是增加了本书的可读性，不是过多的讲数学，而是突出复杂性中的物理问题；二是根据最近几年的学科进展，加入了一章“小波理论及其在分形研究中的应用”及一部分“分形和计算机”的内容。再次出版《分形几何学》修订版的目的，也是为了进一步将这门已经深入到各个学科的横断科学向更多的读者推广，使各个学科相互联系，互相推进，将分形与其它学科的发展紧密联系起来。

罗桂纯同志系统地整理了全书的文稿和插图，改绘了插图和更新了部分参考文献；李娟博士提供了她的最新的研究成果，我对他们表示衷心的感谢。

希望这本小书对于广大读者研究分形几何有参考价值，也欢迎读者对本书中的错误和不足之处提出批评与建议。

陈　颙

2005 年 1 月于北京

目　　录

第一章　分形和分维

自然界大多数的图形都是十分复杂而且不规则的。事实上关于自然现象的复杂性，人们早就了解到了，从古代人们对于自然现象的描述中，很容易找到这种描述复杂性的例子。中国藏族10世纪的壁画对天上云彩形状的刻画（图1.1）和日本早期对海浪的描述（图1.2），都充分显示了人们对自然现象复杂性的认识，传统的几何学习惯用一些简单而规则的基本元素，去近似地代表所研究的对象。但天上的云不是球状的，海浪也不是简单的曲面，传统的几何学在绚丽多姿的大自然面前就显得十分软弱无力了。因此人们一直希望能找到能够描述这些复杂现象的几何工具。

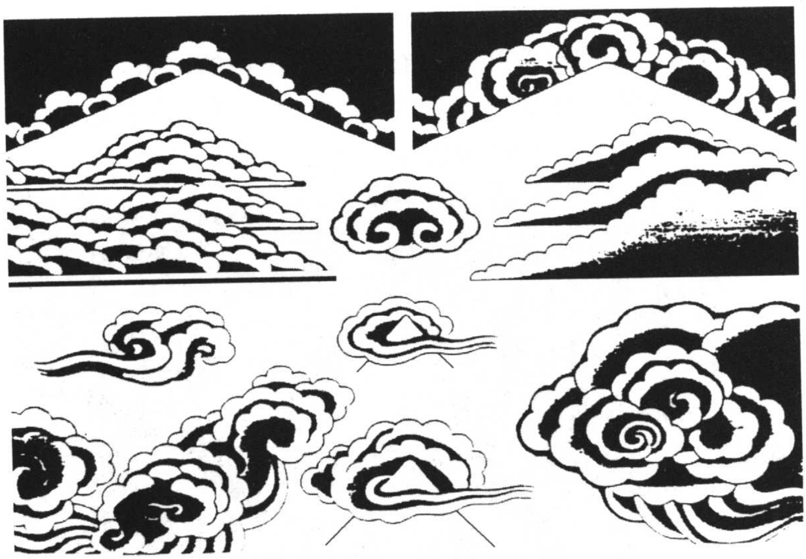


图 1.1　布达拉宫中藏族壁画中的云的形状



图 1.2　日本传统绘画中对海浪的描述

图 1.3 给出了山脉的一幅照片。同样，山脉的形状十分复杂，不同的山有不同的形状，它们都不是能用简单的圆锥形就可以代表的。如果我们在山脉形状复杂多样性的背后，再深入地想一想，为什么会有这么多复杂的形状呢？地质学家的研究表明山脉的复杂形状是长期地质构造运动和至今还在进行的侵蚀作用的结果，那么能否由形状的复杂性推断产生这种复杂形状的运动过程？数字规律又如何？



图 1.3　山脉的复杂形态

当然，回答这些问题真是太难了。大多数人都会认为：复杂的形状是由复杂的过程所造成的，但是否有这样的一种可能性：长期持续并不断重复的简单过程也可以产生非常复杂的形状。如果这种可能性存在的话，用以描述复杂性的分形几何学与用以解释复杂性的演化过程就发生了联系，几何学与动力学就发生了联系。本书前几章将沿着这样的线索向读者介绍分形几何学。首先我们仍然回到传统欧几里德几何学的经典中。

1.1 欧氏几何和分形几何

普通的几何对象，具有整数维数。零维的点、一维的线、二维的面、三维的体，乃至四维的“时空”，是人们熟知的例子。然而近十几年来，具有不必是整数的分维(fractal dimension)的几何对象——分形(fractal)引起了人们的广泛注意。分形几何的主要价值在于它在极端有序和真正混沌之间提供了一种中间可能性。分形最显著的特征是：本来看来十分复杂的事物，事实上大多数均可用仅含很少参数的简单公式来描述。

维数是几何对象的一个重要特征量。直观地说，维数就是为了确定几何对象中一个点的位置所需的独立坐标的数目，或者说独立方向的数目。在平直的欧氏空间中，维数是自然的。地图上的点有经度、纬度两个坐标，一只集装箱有长、宽、高三个尺寸，它们分别是二维和三维的几何对象。欧氏几何中的这种维数就是拓扑维，用字母 d 表示。整数维数构成了欧几里德几何学的法则。

现在从欧氏几何维数定义作进一步的推广。把一个正方形的每个边长增加为原来的 3 倍，得到一个大正方形，它正好等于$3^2=9$个原来的正方形。类似地，把一个立方体的每个边长增加为原来的 3 倍，就得到 $3^3=27$ 个原来大小的立方体。推而广之，一个 d 维几何对象的每个独立方向，都增加为原来的 l 倍，结果得到 N 个原来的对象。这三个数之间的关系是 $l^d=N$，读者不难验证，对于欧氏几何中一切普通的几何对象，这个简单关系都是成立的。现在把这个

关系式两边取对数，写成

$$d=\frac{\ln N}{\ln l} \tag{1.1}$$

由式(1.1)定义的拓扑维 d 在欧氏几何中都是整数。但若将式(1.1)作为维数的定义，对其不加以取整数的限制，我们则向前完成了一次“飞跃”。下面把这样推广定义的维数称为分维，用大写字母 D 来表示，

$$D=\frac{\ln N}{\ln l} \tag{1.2}$$

我们这里再强调一下关系式

$$N=l^d$$

式中的 l 是变换倍数，我们可以把它看作是函数关系中的自变量，而 N 是得到的结果，它是自变量的函数，即 $N=f(l)$。最常见的函数关系有线性关系(图 1.4(a))、指数关系(图 1.4(b))和幂指数关系(图 1.4(c))，它们分别对应

$$\left.\begin{array}{l} N\sim cl+d \\ N\sim c^l \\ N\sim l^c \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

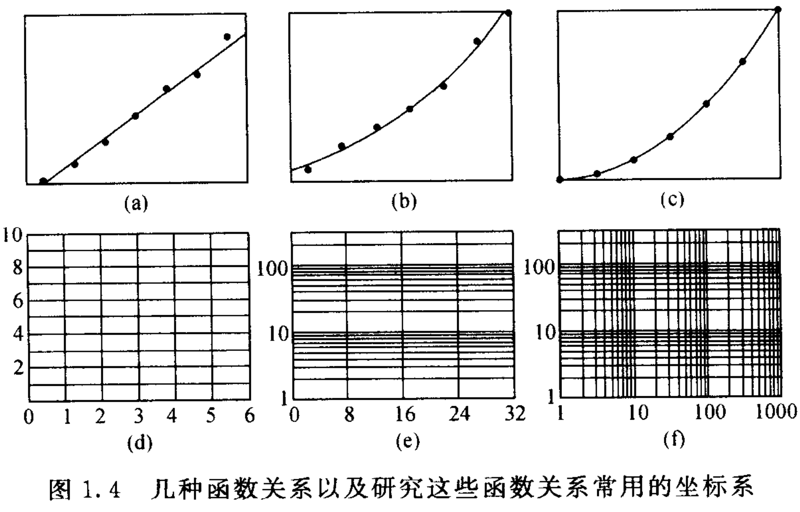


图 1.4　几种函数关系以及研究这些函数关系常用的坐标系

(a) 线数；(b) 指数；(c) 幂指数函数关系；(d) 线性坐标系；

(e) 半对数坐标系；(f) 双对数坐标系

式中 c，d 皆为常数。从上面变换时的讨论可知，与分维定义有关的函数关系是幂指数关系，简称幂律(power law)，用图示方法研究线性关系、指数关系和幂指数关系最方便的坐标系分别是线性坐标系、半对数坐标系和双对数坐标系(图 1.4(d，e，f))。当我们研究分形与分维问题时，最经常用到的是双对数坐标。

1.2 自相似性和标度不变性

地质现象的描述，离不开标度。对一些地质现象拍照时，一定要放上一个能表示尺度大小的物体(作为一种特征尺度)，如一枚硬币，一把锤子或站上一个人。没有这些物体，很难确定这些照片反映的是 10 m 还是 10 km 范围的现象。如果我们有一幅关于岩石海岸线的照片，而没有表示特征长度的物体，如一棵树或一所房屋，那么就很难确定照片是从多高的地方拍摄的。这是因为海岸线具有自相似性，即将海岸线的一部分放大后，它与原来的海岸线看起来是相似的。如果几何对象的一个局部放大后与其整体相似，这种性质就叫做自相似性(self-similarity)。地球科学中许多现象都具有自相似性。1860 年，Rukin 在一本书中写道："当观察一块石头时，你会发现它像一座缩微的山脉。大自然的神工鬼斧，可以把大尺度的山脉缩微成小尺度。在一块 1 m 大小的石块上，你可以找到自然界中各种图形和构造的变化形态。石块上的苔藓像森林，晶体的颗粒像悬崖，岩石的表面像山脉……"当观测标度变化时，几何体(或集合)的许多性质保持不变。这种标度不变性(scale invariant)在地学中也经常见到。具有自相似或标度不变性的几何对象，我们说它们是分形的。研究分形体的数学基础是测度论(measure theory)和公度拓扑学(metric topology)。由测度论给出的分形定义(Mandelbrot，1992)难于被不熟悉测度论的人理解，并且在实际中也难于应用。而分形理论的奠基人 Mandelbrot 给出了更易理解的概念。下面给出的两个定义，虽然不够精确和不够数学化，但在物理上易于理解。

定义 1(Mandelbrot，1986)：部分以某种形式与整体相似的形状

叫做分形。

定义 2(Edgar，1990)：分形集合是这样一种集合，它比传统几何学研究的所有集合还要更加不规则(irregular)，无论是放大还是缩小，甚至进一步地缩小，这种集合的不规则性仍是明显的。

分形(fractal)一词是从拉丁文 fractus 转化而来的。它的原意是“不规则的、支离破碎的”物体，英文字典中出现 fractal 一词是 1975 年以后的事情。而在山西五台山南山寺的影壁墙上的碑文(图 1.5)中，早在清朝时代就有了“日月光明，分形变化”的语句。



图 1.5　山西五台山南山寺的影壁上的诗句
“当初以来，混元一气，天地回履，日月光明，分形变化……”
南山寺中该影壁是 18 世纪重修的

自然界的许多系统、现象和过程都具有分形特征。比如星云的分布、海岸线的形状、山脉的起伏、地震、河网水系分布、湍流、凝集体、相变、人的血管系统、肺膜结构、城市噪音、气候剧烈变化、股票的变动等等。其复杂形态都可以用幂指数函数的 D(即分维)来描述。今天，分形几何学已成为描述自然界，特别是许多不规则地学现象的有力工具。翻开任何一本 20 世纪 90 年代的文献目录，“分形”两字频繁出现。关于分形和分维的国际讨论会每年至少有好几次。

曼德尔布罗特(B. B. Mandelbrot，1924～)

——分形理论的创始人



Mandelbrot 1924 年出生于波兰华沙；1936 年他全家移居法国巴黎；经历了二战的变乱与动荡；1948 年在帕萨迪纳获航空学硕士学位；1952 年在巴黎大学获数学博士学位；曾是普林斯顿、日内瓦、巴黎的访问教授，哈佛大学的“数学实践讲座”的教授，IBM 公司的研究成员和会员。

在 Mandelbrot 时代，对人们来说，自然界大多数的图像都是十分复杂而且不规则的，传统的几何学在绚丽多姿的大自然面前就显得十分软弱无力了。人们一直希望能找到描述这些复杂现象的几何工具。分形的创立也是基于一个巧合，颇似当年哥伦布发现美洲新大陆的意外收获。Mandelbrot 原先是为了解决电话电路的噪声等实际问题，结果却发现了几何学的一个新领域。Mandelbrot 创造了分形几何学，为人们解决了这个困惑已久的问题。

1967 年发表于美国《科学》杂志上的“英国的海岸线有多长”的划时代论文，是他的分形思想萌芽的重要标志；1973 年，他提出了分形几何学的整体思想；1975 年，创造了 fractal 一词，来描述他所研究的那些不规则、破碎不堪、不光滑、不可微的东西，并著成了《分形：形状、机遇和维数(Fractal, Form, Chance, and Dimension)》一书；1982 年，他的又一著作《大自然的分形几何(The Fractal Geometry of Nature)》又与读者见面，此书被分形界的学者视为“圣经”。

分形的研究，是力图以数学的方法，模拟自然界存在的及科学研究中出现的那些看似无规律的各种现象。在过去的几十年里，分形在物理学、材料科学、地质勘探乃至股价的预测等方面都得到了广泛的应用或密切的注意，并且由于分形的引入，使得一些学科焕发了新的活力。由于 Mandelbrot 的不断研究、持续努力和非凡贡献，分形理论发展成为一门应用广泛、用途远大的学科。

1.3 Koch 曲线

下面以最简单的 Koch 曲线来说明什么是分形。

平面上($d=2$)有一单位线段(图 1.6(a)),用以下迭代方法造出 Koch 曲线。第一步,将单位线段分成三等份,将中间部分用两条长 1/3的折线来替代(图 1.6 (b));第二步,将图 1.6(b)中的每条线段三等份,中间的一段用长 $1/3^2$ 的两条折线替代,得到图(1.6(c));不断

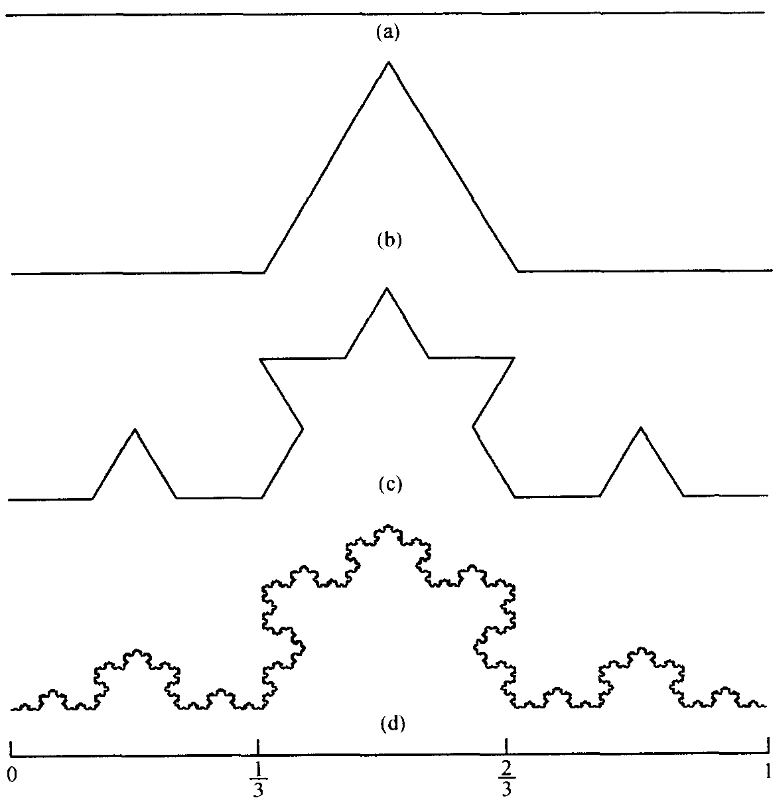


图 1.6 Koch 曲线的自相似特征

(a) 单位线段;(b) 单位线段三等份,中间一段用与其长度相同的两段替代;(c) 将(b)得到的图形中的线段再三等份,中间用与其长度相同的两条折线替代;(d) 不断重复以上迭代作法得到 Koch 曲线

重复这样的迭代作法，无数次迭代后就生成了具有无穷多弯曲、处处连续、处处不可微商的 Koch 曲线。事实上，Koch 曲线是经常用作模拟雪花和海岸线形状的数学模型(请注意：上述数学的迭代过程对应的是物理世界中的一种演化过程)。

Koch 曲线是分形的，因为它是自相似的。自相似性就是跨尺度的对称性。它意味着递归，在一个图形内部还有图形(pattern)。从图 1.6(d)中可以清楚地看出这一点。自相似性指的是把要考虑的图形一部分放大，其形状与整体相同，设想把图 1.6(d)中 Koch 曲线区间[0，1/3]中的图形放大 3 倍，放大后的图形与原来的曲线形状完全相同。把区间[2/3，1]放大 3 倍，也会得到同样结果。虽然区间[1/3，1/2]，[1/2，2/3]的图形是倾斜的，但是把它放大，也会得到同样的结果。若把区间[0，1/9]的图形放大 9 倍，同样也可以求得与原来相同的图形。对更小的部分进行放大也是如此。不论多小的部分，若把它放大到适当大小，应该能得出与原来相同的图形。

既然 Koch 曲线是分形的，下面求其分维。将图 1.7 中部的图形放大 3 倍后，得到图 1.7 下部曲线，它是由 4 个原来的图形组成的，因此，Koch 曲线的分维 D 为

$$D=\frac{\ln 4}{\ln 3}=1.26$$

在第 n 步迭代时，每个线段的长度为$(1/3)^n$，一共有 4^n 个这样的线段。因此，Koch 曲线的长度在第 n 步时为

$$L_n=(4/3)^n$$

显然当时 $n\to\infty$，$L_n\to\infty$。这里我们见到一有趣的结果。一般(欧氏几何中)物体的长度与测量单位无关。对于镶嵌于平面之上的 Koch 曲线，其面积 S 为零，而当 $n\to\infty$，长度 $L\to\infty$。显然，S 和 L 都不能很好地描述 Koch 曲线这样的分形，而分维 $D=1.26$ 恰好反映了这种曲线的不规则性和复杂性。$D=\ln 4/\ln 3$ 是它不规则性的度量。

下面是产生 Koch 曲线的程序代码：

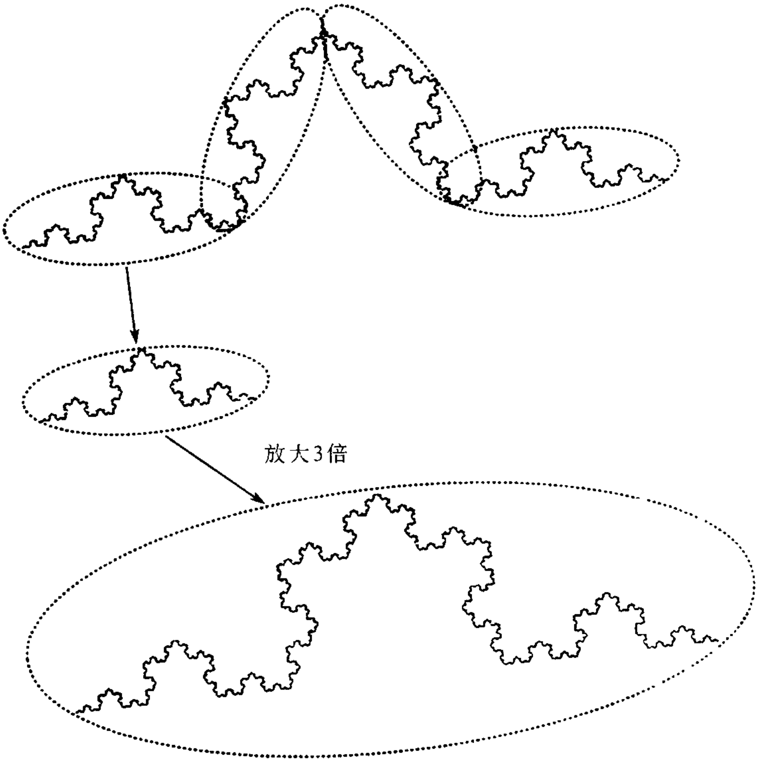


图 1.7　Koch 曲线的自相似性

将一个 Koch 曲线(中部)放大了 3 倍后，得到下部的曲线，通过分解，可以看出，放大的曲线是由 4 个原来的 Koch 曲线组成的(上部)

产生 Koch 曲线的计算机迭代算法(Matlab)

```
N=12;
X=zeros(1, 2^(N+1)-2);
Y=zeros(1, 2^(N+1)-2);
A=sqrt(1/3.0) * (cos(pi/6));
B=sqrt(1/3.0) * (sin(pi/6));
A1=A; A2=B; A3=B; A4=-A;
B1=A; B2=-B; B3=-B; B4=-A;
hold on
X(1)=0;
```

```
Y(1)=0;
V=[0, 1, -0.05, 0.6];
axis(V);
for M=1 : N
    L2=2^(M-1);
    L1=L2*2+1;
    L3=L1*2;
    for K=0 : L2
        XX=X(L2+K);
        YY=Y(L2+K);
        X(L1+K)=A1*XX+A2*YY;
        Y(L1+K)=A3*XX+A4*YY;
        X(L3-K)=B1*XX+B2*YY+1-B1;
        Y(L3-K)=B3*XX+B4*YY-B3;
        plot(X(L1+K), Y(L1+K),' .k')
        plot(X(L3-K), Y(L3-K),' .k')

  end
end
hold off
```

产生Koch 曲线的计算机迭代算法(Basic 语言)

```
110'
110'   VON KOCH CURVE
120'
130    N=12: PI=3.14159
140    DIMX(2^(N+1)-2, Y(2^(N+1)-2)
150    SCREEN 2, 0: CLS
160    WINDOW (0, -2/3)-(1, 0)
170    'VIEW(0, 0)-(599, 399)
```

```
190  A=SQR (1/3) * COS(PI/6)
200  B=SQR (1/3) * SIN(PI/6)
210  A1=A: A2=B: A3=B: A4=-A
220  B1=A: B2=-B: B3=-B: B4=-A
230
240  X(0)=0: Y(0)=0
250  FORM=1 TO N
260  L2=2^(M-1)-1: L1=L2*2+1: L3=L1*2
270  FORK=0 TO L2
280  XX=X(L2+K): YY=Y(L2+K)
290  X(L1+K)=A1*XX+A2*YY
300  Y(L1+K)=A3*XX+A4*YY
310  X(L3-K)=B1*XX+B2*YY+1-B1
320  Y(L3-K)=B3*XX+B4*YY-B3
330  PSET(X(L1+K), -Y(L1+K))
340  PSET (X(L3-K), -Y(L3-K))
350  NEXT K
360  NEXT M
370  END
```

值得指出的是，从原始图形出发，依照上面程序中 160 条和 220 条的规则，就可以生成 Koch 曲线。假如我们对迭加规则作以下改动（程序中其他条不变）：

```
110'  FRACTAL BRANCH
160   WINDOW (0, -1/3)-(1, 1/3)
220   C=2/3: B1=C: B2=0: B3=0: B4=-C
```

有兴趣的读者运行修改后的程序不难发现，生成的图案是如同松柏树枝形状的图形。松柏树枝与 Koch 曲线是十分不同的形状，但产生这些图形的计算机程序却几乎是相同的，不同的是 160 条和 220 条所反映的生成规则不同。这种生成规则，仿佛像

遗传密码一样，可以生成各种各样的图形。这正是十分复杂的事物（图形或集合）可以用少数简单的参数（分形维数或遗传密码）来描述的原因。

从 Koch 曲线的生成，我们接触到一个重要的概念，这就是特征尺度的概念。一般的研究对象总有它自己的特征尺度，要用恰当的尺度去测量。例如，当我们研究一群人的身高时，用接近于平均身高的尺子作为测量单位（例如 1 m）显然是合适的。但用一把固定的尺子去测量 Koch 曲线就会遇到困难，Koch 曲线是不具有特征尺度的几何对象，无论用 1，1/2，$1/n$…的尺子去测量它，都难以得到它的确切长度。Koch 曲线具有无穷多折线，当测量尺子的尺度越来越小时，新的结构却与整体结构具有同样的复杂性。没有特征尺度，就必须考虑从小到大的许多尺度（或称之为标度），这种无标度性的核心是自相似，也叫做标度不变性，它对应于分形中存在着的层次结构（hierarchy）。

从传统的几何学出发，我们用非常简单的一把直尺去研究 Koch 曲线，会发现它十分的复杂，它包含无限的层次结构，用什么样的尺子都很难测量它，所以我们说 Koch 曲线是很复杂的几何对象。从分形几何学出发，我们用一个看起来很复杂的测量单位——一个小的 Koch 曲线——去测量 Koch 曲线，所得的结果却十分的简单。对比以上两种情况：欧氏几何用简单的图形作为工具，研究某些对象时发现存在着复杂性；分形几何用复杂的图形（恰恰是利用自相似性，利用复杂图形的本身或其一部分）做工具，研究复杂对象时得到非常简单的结果。由此可以看到，分形几何学这一面镜子里映照出来的宇宙是粗糙的，凹凸不平的。长空霹雳闪电的径迹之所以有意义，并不是它的方向，而在于它分布的曲曲折折。正是这种曲曲折折蕴含着绝非随机，也非偶然的复杂性。这就是分形几何学所要求的信念，它完全不同于欧氏几何学的思想。

科赫(Von Koch，1870～1924)

——Koch 曲线的创始人



瑞典数学家，出生于军人家庭，1887 年考入斯德哥尔摩大学，1892 年获得数学博士学位，为泛函分析的发展做出了卓越的贡献，在纯数学理论方面取得了很多成绩。

1904 年，Koch 将雪花理想化，并与数学相结合，得到了 Koch 雪花曲线。这是一个非常有趣的问题，一个有限的面积却有无限的边长，这为以后很多学科的发展提供了新思路和新方法。1906 年，Koch 在西班牙国家标准上发表了一篇阐述 Koch 曲线的文章，举世闻名的 Koch 曲线从此被创生。Koch 曲线常用作模拟雪花和海岸线的形状。当迭代次数无穷多时，Koch 曲线的长度就趋于无穷。

Koch 曲线使人们感悟到科学与艺术的融合，数学与艺术审美上的统一，使昨日枯燥的数学不再仅仅是抽象的哲理，而是具体的感受；不再仅仅是揭示自然的存在，而是一种艺术创作，搭起了科学与艺术的桥梁。

1.4 Cantor 集合

严格满足自相似条件的图形(例如上面谈到的 Koch 曲线)，我们称之为数字分形，也叫做有规分形。在地球科学和物理学中存在的分形，它们的自相似是近似的或统计意义上的，我们称之为统计分形，或无规分形。

现在以三分 Cantor 集合为例，说明数字分形的一些特点。如图 1.8 所示，把线段[0，1]分成三等份，把中央的部分[1/3，2/3]去掉。接着，把剩余的线段[0，1/3]，[2/3，1]再分别分成三等份，去掉中央的部分[1/9，2/9]，[7/9，8/9]。这种作法不断重复下去，图 1.8 给出了第 6 级的情况。当这一操作反复无限次达到极限时所剩下来的点的集合，叫做 Cantor 集合。从上面讨讨可知，Cantor 集

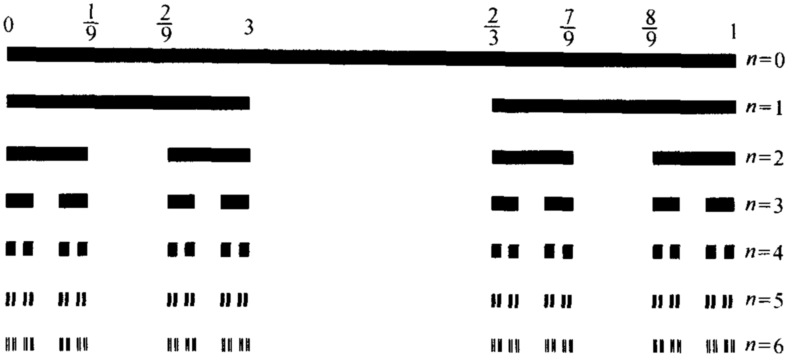


图 1.8　具有严格自相似性的三分 Cantor 集合

合是严格自相似的，它的分维 D 为

$$D=\ln 2/\ln 3=0.6309$$

关于 Cantor 集合有两点值得强调。第一，以上三分 Cantor 集合是把单位线段分成三段，舍去一段，保留 2 段，不断重复这种作法而生成的。倘若将单位线段等分 3^k（k 是任意整数）段，保留 2^k 段，并不断重复这种作法，也可以得到一个分形的 Cantor 集合，它是与三分 Cantor 集合不同的集合，它的分维 D

$$D=\ln 2^k/\ln 3^k=\ln 2/\ln 3=0.6309\cdots$$

与三分 Cantor 集合相同。因此，不同的分形图形可以具有相同的分维。由此可见，分维虽然可以表征分形的基本特征，但要完全确定地描述分形，目前意义下用单一参数——分维是不够的，需要用多个（甚至无穷多个）参数来描述。这就是下面第六章中要讲的多重分形。第二点需要强调的是，数学分形经常是用来解释复杂现象的简单数学模型，仍以 Cantor 集合为例，Cantor 集合是由无穷多个点组成，相邻点之间存在着“空区”，如果把单位线段看成是时间轴，每个点看成是发生在时间轴上的一次“点”事件，可以把相邻事件之间的“空区”看成是事件的间隔时间 Δt_i。从图 1.8 最下方的 Cantor 集合可以看出，存在着各种大小的 Δt_i。可以证明，比 Δt_0 间隔长的“空区”的 Δt_i 数目 $N(\Delta t_i>\Delta t_0)$与 Δt_0 之间存在着幂指数关系，其幂指数即为 Cantor 集合的分维 D，即

$$N(\Delta t_i > \Delta t_0) \propto (\Delta t_0)^{-D}$$

证明如下：用 Δt 作尺子去测量Cantor集合的空区。由分形定义可知长为 Δt 的空区数目 $N(\Delta t)$ 与 Δt 之间的关系是

$$N(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-D}$$

令 $n(\Delta t)$ 表示长度在 $(\Delta t - \delta t,\ \Delta t)$ 之间的空区数目，则有

$$n(\Delta t) = \frac{\mathrm{d}N(\Delta t)}{\mathrm{d}\Delta t}$$

所以

$$n(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-D-1}$$

于是

$$N(\Delta t > \Delta t_0) = \int_{\Delta t_0}^{+\infty} n(\Delta t)\mathrm{d}(\Delta t) \propto (\Delta t_0)^{-D}$$

由图 1.8 给出的 Cantor 集合的图形，可以看出 Cantor 集合在线段[0，1]上的分布不是均匀的。假定把[0，1]想像为是一时间轴的话，Cantor 集合代表了时间轴上发生的无限多个“点”事件，这些“点”事件之间的时间间隔服从幂指数分布，它提供了描述自然界中许多演化过程的一种有用的数学模型。分形的创始人 Mandelbrot 研究了电子通讯线路中出现误差的规律，发现它与 Cantor 集合是如此相似。误差是一簇簇不连续出现的。一段无误差的通讯之后紧跟着一段有误差的通讯。通过仔细观察，可以看到一簇簇的误差段中仍含有无误差的段落，如此下去，构成了分形时间的实例。Mandelbrot 发现一小时与一秒的不同水平上无误差与有误差段的比值相同，是一常量。这正是 Cantor 集合在现实中的一个典型例子。因此 Cantor 集合在模拟间断性时是不可缺少的工具。正是利用了 Cantor 集合的这种特性，Kagan 和 Knopoff(1981)，Smalley 等(1987)，陈顒等(1997)分别构造了地震发生时间演化的数学模型。

从 Cantor 集合，我们还可以看到，一种复杂图形(例如 Cantor 集合)，可以由非常简单的规则(生成规则)经过持续并不断重复的迭代过程(演化过程)而生成。这种简单过程可以生成复杂图形，复杂图形中包含着简单的规则，是理解和应用分形几何的核心思想。我们总结上面几个复杂图形的例子，一般来说，可以把复杂图形的生成过程用图 1.9 来表示。

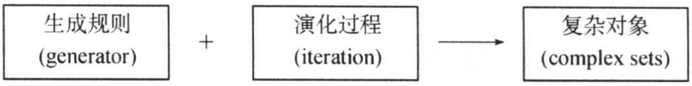


图 1.9　复杂图形的一种生成过程

以三分 Cantor 集合为例，若以 1 表示存在(保留)，以 0 表示不存在(去掉)，则：

$n=1$	1	0	1
$n=2$	101	000	101
$n=3$	101 000 101	000 000 000	101 000 101
…	…	…	…

不难看出，Cantor 集合的生成原则是：

0→0　0　0

1→1　0　1

Georg Cantor(1845～1918)

——Cantor 集合的创始人



德籍俄国数学家，出生于俄国彼得斯堡的商人家庭，1856 年举家迁往德国。1862 年进入苏黎世工艺学校攻读数学，在这期间，Cantor 充分展现了其数学天赋。1867 年获得博士学位，后从事数学方面的教学工作，并因善于和别人合作与交流而取得了很多的成绩。

从 1869 年开始，Cantor 把研究方向由数论转向数学分析。1870 年，解决了当时难倒很多大数学家的难题——三角级数问题，并在无理数、代数等方面取得巨大成绩。1872 年发明了 Cantor 集合。Cantor 集合是严格满足自相似条件的数学分形图形，并将几何学与集合论进行了完美的结合。

Cantor 的很多成果都让世人惊奇不已。有时连他自己都会说：I see it, but I don't believe it!

1.5 Sierpinski 垫片

波兰数学家 Sierpinski 于 1916 年提出了一种分形生成方法(Mandelbrot，1982)。

从一等边三角形开始进行迭代操作：将其 4 等份，去掉中心的那部分(图 1.10)，无限重复这种操作，最终所得的极限图形叫做 Sierpinski 垫片。Sierpinski 垫片是如此的完美，著名的巴黎埃菲尔铁塔正是以它作为平面图。虽然铁塔并没有把分形进行到无穷，但是它已经体现了这项工程的精采，即在不损害结构强度条件下完成了重力的转移。

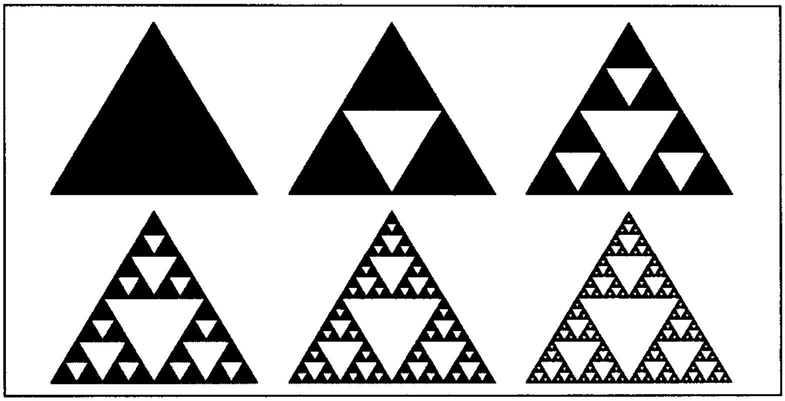


图 1.10 生成 Sierpinski 垫片的基本作法

如果从一正方形开始，将其 9 等份，去掉中心那部分(图 1.11)，不断重复这种迭代过程，最终得到的是 Sierpinski 地毯。

在三维图形中与上述相似的作法是 Menger(Menger，1928，1943)提出来的，将一单位立方体等分成边长为$\frac{1}{3}$的 27 个小立方体，去掉各面中心的 6 个小立方体以及正中心的那个小立方体，保留剩下的 20 个小立方体，不断重复这个过程，最后得到的极限图形就叫做 Menger 海绵。显然，Menger 海绵的分维

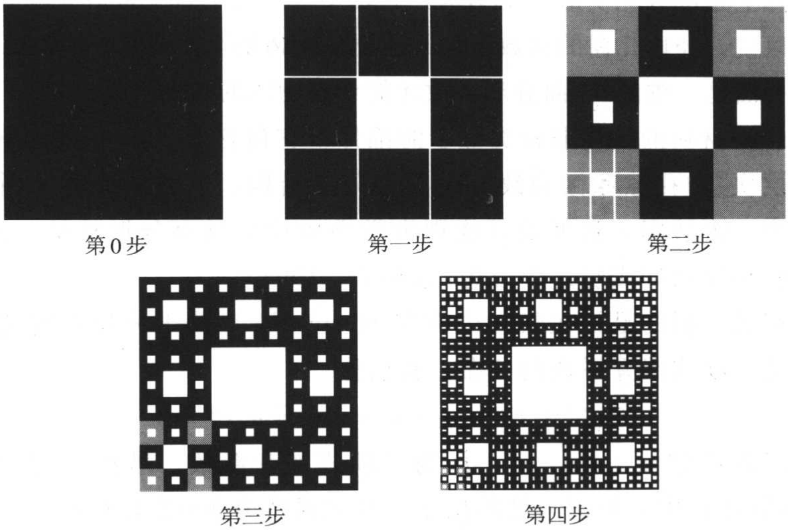


图 1.11　生成 Sierpinski 地毯的基本作法

$$D=\frac{\ln 20}{\ln 3}\approx 2.7268$$

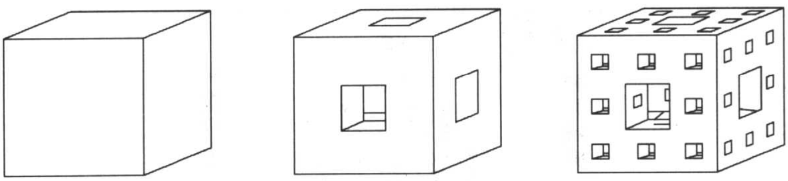


图 1.12　Menger 海绵

Menger 海绵可以用来作为模拟岩石结构的数学模型。从表观上看，海绵立方块是一个立方体，是三维的。但它是以某一构造为基础而规则形成的许多孔洞的高度无序结构。假定最初单位立方体的密度是 ρ_0，不难计算出经过 n 次迭代后生成的图形的平均密度是

$$\rho_n=\left(\frac{20}{27}\right)^n\rho_0$$

当 $n\to\infty$ 时

$$\rho_\infty=0$$

这表明，Menger 海绵的质量(或体积)为零。即在一定压力下它能压实在一个平面上，这时就是二维的。这说明，从表观看上去充实的立方

体实际上是部分充实的三维结构，其真实维数大于 2.0 而小于 3.0。所以可以说，经典几何的整数维数只能反映物体的表观现象(立体是三维的，平面是二维的)，而分形维数才能刻画物体的内在特性。

岩石材料的结构非常类似于海绵体，它包含了大量不同大小(即不同层次)的孔隙和微裂纹，它具有分形结构。岩石的变形、断裂、孔隙率、渗透率、密度及其物理力学性质均应具有分形特征。大量的实验结果已证实了这个思想(谢和平，1994)。

值得一提的是，在数学中有与 Sierpinski 垫片十分相似的情况，这就是二项式展开系数的分布。我们称

$$(1+x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

展开式的系数 a_0，a_1，…，a_n 为二项式展开系数。早在 13 世纪的《九章算术》中，中国人就给出了二项式系数分布(图 1.13)。

1654 年，法国数学家 Pascal 仔细研究了由 $(1+x)^n$ 展开系数组成的这个三角形，发现它具有很多重要的特征，于是，人们常称这

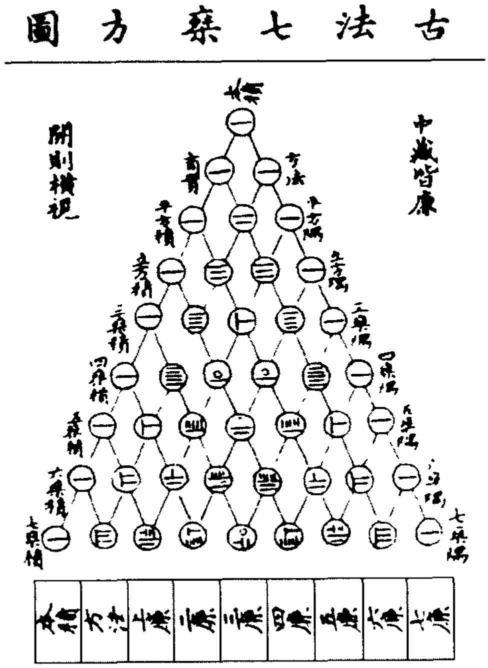


图 1.13　1303 年的《九章算术》中的二项式系数图

图中给出了前 8 行的二项式系数。国外也称为 Pascal 三角形

些三角形为 Pascal 三角形(图 1.14，图 1.15，图 1.16)。

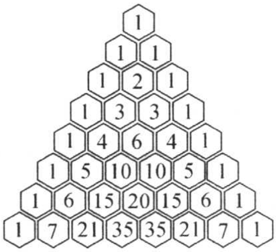


图 1.14　Pascal 三角形前 8 行，用阿拉伯数字表示

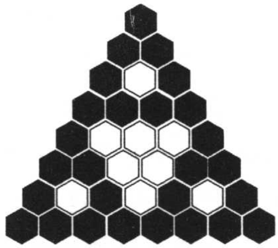


图 1.15　将 Pascal 三角形中所有的奇数涂黑，得到的黑-白颜色三角形

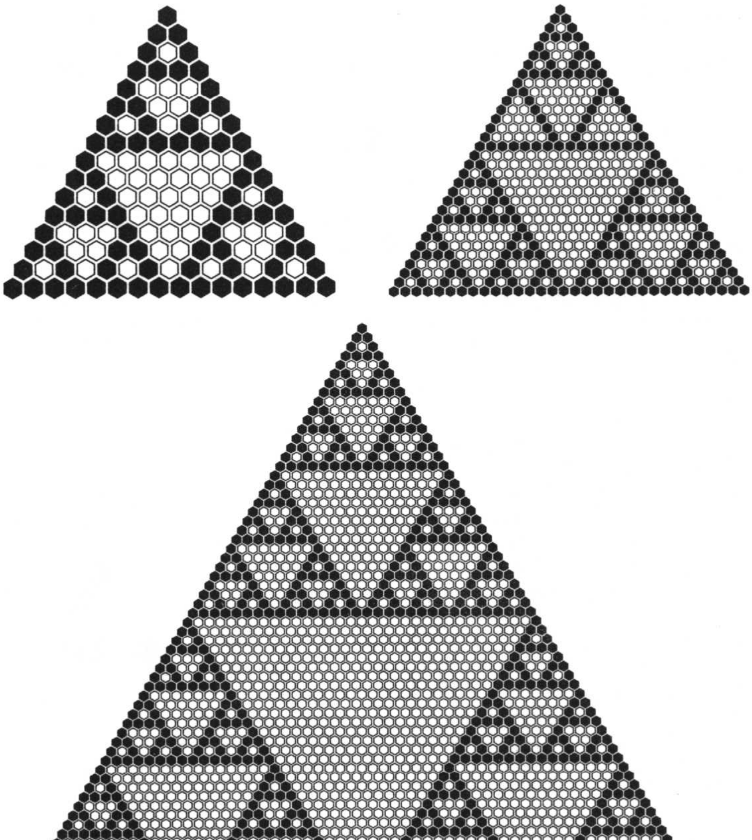


图 1.16　由 Pascal 三角形行前 16 行，32 行和 64 行得到的黑-白三角形

近年来，人们常用一些人工智能的模型去研究动力学过程，细胞自动机(Cellular Autornta)就是其中一种。在图 1.17 中，每一行代表一个时刻，下面的一行则代表下一时刻，依此类推。细胞自动机的核心思想是下一时刻的状态是由上一时刻的状态按照某些规则演化而成的。现假定一系统的初始状态如图 1.17 的第一行所示，只有一个黑细胞(代表奇数)，而这个系统的演化规律如图右下方小框所示，下一状态细胞的颜色取决于上一状态它左、右两个细胞的状态：若左、右两个细胞都是白的或都是黑的(其和为偶数)，则它就是白的；若左、右两个细胞一白一黑(其和为奇数)，则它就是黑的。读者不妨用图 1.17 练习一下，一幅 Pascal 三角形就生成了，而它是自相似分形的。值得注意的是：这幅 Pascal 三角形是用动力学中的

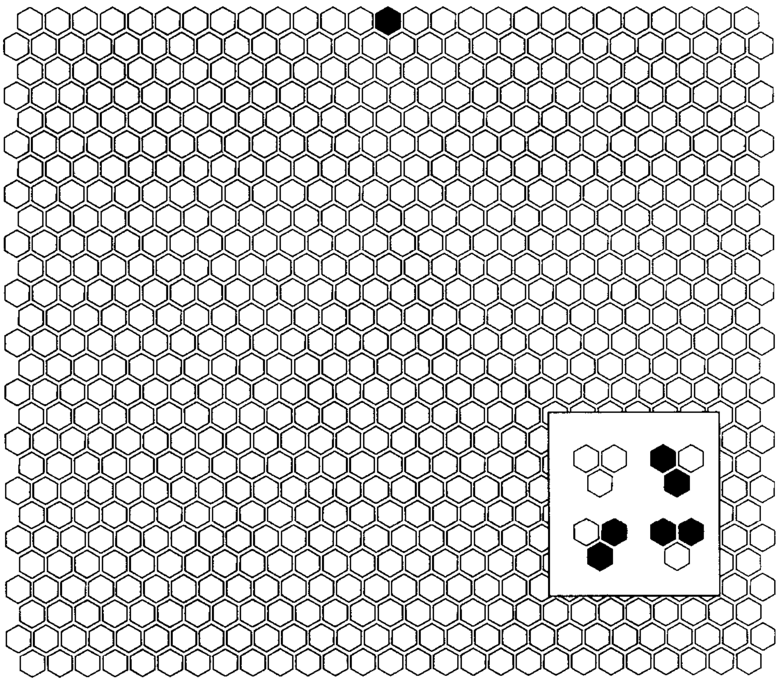


图 1.17　用一简单的细胞自动机进行动力学过程的演化

最上面的一行代表初始状态，演化的规则见图右下方的插图。读者不难根据这种规则生成下一时刻系统的状态(即图中第二行的状态)。依次演化下去，最终得到的演化史的图案恰是一幅 Sierpinski 垫片

细胞自动机模型生成的，而其形状与Sierpinski垫片完全一样，由此可以看到动力学与分形几何学之间存在着某种内在联系。

Waclaw Sierpinski(1882～1969)

——Sierpinski垫片的创始人



波兰数学家，1882年出生于波兰华沙。毕业于华沙大学数理学院。1908～1914年任教于利沃夫大学，1914～1917年任教于莫斯科大学。一战结束后，返回华沙大学，并终生任职于此。曾获得十个学校的荣誉博士学位。1949年开始担任波兰科学院的副院长。

1914年在莫斯科大学时就致力于集合论，并构造了Sierpinski垫片，为分形几何学的发展做出了巨大贡献。天才数学家将数学与艺术相结合。Sierpinski垫片是如此的完美，著名的巴黎埃菲尔铁塔正是以它作为平面图。Sierpinski垫片的原理被广泛运用到现代建筑中。

其实在Sierpinski之前，在数学中已经有了与Sierpinski垫片十分相似的情况，这就是二项式展开系数的分布。早在1303年的《九章算术》中，中国人就给出了二项式系数分布——杨辉三角。1654年，法国数学家Pascal仔细研究了由$(1+X)^n$展开系数组成的三角形。将Pascal三角形中所有的奇数涂黑，得到的黑—白三角形，其形状与Sierpinski垫片十分相似。

Sierpinski的最突出的成绩还有集合论、拓扑学和数论，一生发表的论文超过700篇，论著超过50本。

1.6 能充满整个平面的曲线

意大利数学家Peano(1890)，受到伊斯兰教地区发现的许多图案的启发，1890年提出了一种平面的曲线，它能充满整个平面(plane-

filling)。后来又发现了这种曲线的许多种变化，为了纪念 Peano，人们习惯把这种能充满整个平面(plane-filling)的曲线统统称为 Peano 曲线。

回顾我们所举的几个分形的例子，Koch 曲线是无限长的，但它只局限于有限的面积之中；Cantor 集合包含了无穷多个点，但它的长度为 0；Menger 海绵的表面积无穷大，但它只占距一定的三维空间，而且实际体积趋于 0；进一步考察 Peano 曲线，我们同样会惊奇的发现，这些曲线的长度趋于无穷，但它们的面积却不会随着迭代过程的进行而无穷增大下去。有趣的是，自然界中如此精细的结构比比皆是，人们最熟悉的例子就是人体自身。人的循环系统将巨大的面积挤入有限的体积之中，分形的血管分布得如此之广，以致在大多数组织中，没有一个细胞与血管相距超过四个细胞(卢侃等，1991)。可是血管和血液只占极少的空间，不超过身体的 5%。正如同 Mandelbort 所说的，莎士比亚名剧《威尼斯商人》中说割下一磅肉是不能不流血，其实，割下一毫克肉也要流血的！分形的本质所设计的奇妙结构更使得表面积比一片网球场的面积还要大的人肺压缩于最小的体积之中，使人获得最大限度的吸取氧的能力(吸氧能力与肺的表面积成正比)。正是分形结构的这种有限与无限的对应关系启发了 Ruelle 和 Takens(1971)，最终使他们证明了用于描述类似于湍流这类混沌的动力系统状态的吸引子轨道的存在性，从而完成了那篇发表于 1971 年在混沌动力学研究史上起着举足轻重地位的论文："On the Nature of Turblence"（湍流的本质)。

为了叙述 Peano 曲线的生成过程，我们引用 L 语言(Peitgen 等，1992)令：

F 代表从某点前进一个步长 l(为简单计，假定所有的步长都相等)，这样就在平面上画出了一条长度为 l 的线。

＋代表从某点向左转 90°(转的角度也可以不是 90°，而是一个特定设置的值，但我们这里只讨论 90°的情况)。

－代表从某点向右转 90°。

图 1.18 是 Peano 曲线的生成过程，原始状态是从一点向前走一步，生成原则为：第一次迭代时，F 生成原则变为

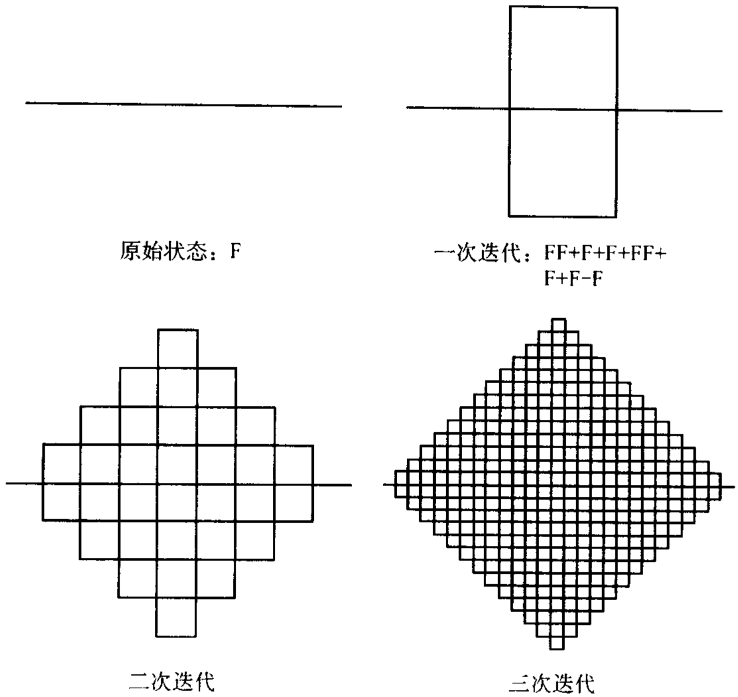


图 1.18　Peano 曲线前三次的迭代过程以及其生成过程的 L 语言表示

$$F \to FF+F+F+FF+F+F-F$$

我们也可以将这生成原则改为

$$F \to F+F-F-F-F+F+F+F-F$$

前者在计算机上使用起来较为方便。

能够充满整个平面的曲线，除了 Peano 曲线外还有许多，图 1.19 给出其中的几个例子，有兴趣的人不妨用 L 语言写出它们的生成原则来。

本章引进了分形、分维、自相似特征长度和幂律等许多概念。为了说明这些新的概念，列举了许多经典分形的例子，如 Cantor 集合(1872)，Peano 曲线(1890)，Koch 曲线(1906)和 Sierpinski 垫片(1916)等。早期，数学界认为他们提出的这些几何图形是一些怪物，但也承认在数字的研究领域中确实存在着一些类似于怪物的图形。本章引进这些经典的分形例子，意义则完全不同，它们所固有的复

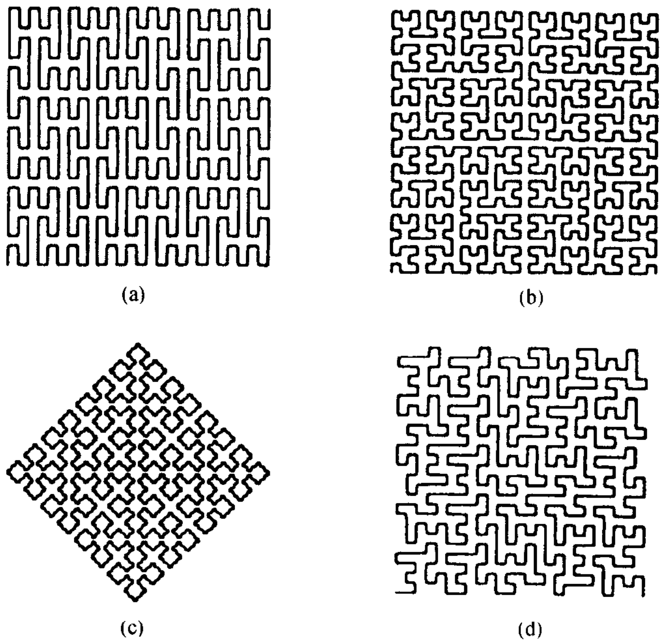


图 1.19　一些能充满整个平面的曲线

(a) 另一种 Peano 曲线(1890)；(b) Hilbert 曲线(1891)；(c) Sierpinski 图形的平面网格近似；(d) 另一种充满平面的曲线

杂特征，恰恰代表了自然界许多对象所具有的普适性。它们提出了与传统欧氏几何完全不同的另一种思维方式，例如，利用一个与几何对象自相似的“尺子”来研究所谓复杂现象时，我们惊奇地发现，看起来十分复杂的对象中竟然蕴藏着如此简单的规律，归根结底，“分形”这个词已经立足于词林之中。用以描述、计算、思考那些不规整而又支离破碎的结构——从雪花的结晶线条到银河系中不连续的灰尘。分形已成为模拟复杂自然界的一条新的途径。

附录　分形几何学研究中的一些重要事件

(1) 复杂不规则的几何对象

1872 年：Cantor 集合(Cantor，1872)

1895 年：处处连续、处处不可微商的 Weierstrass 曲线（Weierstrass，1895）

1906 年：布朗运动（Perrin，1906）

1906 年：Koch 曲线（Von Koch，1906）

(2) 标度律

1919 年：复杂几何对象的 Hausdorff 维（Hausdorff，1919）

1951 年：研究尼罗河的 Hurst 定律（Hurst，1965）

1954 年：地震震级分布的 Gutenberg-Richer 关系（Gutenberg and Richter，1954）

(3) 分形

1975 年：Mandelbrot 引入英文的“分形”一词，2 年后出版他的“Fractals：Form，Chance and Dimension”一书

1982 年：分形应用于生态学（Hasting et al.）和积云物理学（Lovejoy，1982），Mandelbrot 出版“The Fractal Geometry of Nature”

1986 年：提出迭代函数系（Barnsley and Denko，1986）

1991 年：英国 Pergman 出版社创办了《Chaos，Soliton and Fractal》的国际学术刊物

1993 年：新加坡世界科学出版社推出了《Fractals》杂志

1994 年 ：分形的创始人 Mandelbrot 70 寿辰，纪念文集由新加坡的《Fractals》杂志专刊出版

1998 年：在 Valletta（Malta）举办了“分形 98 年会议”（5th International Multidisciplinary Conference），讨论了混沌、分形和非线性信号处理

2003 年：在 Friedrichroda（Germany）召开了“第三届分形几何和推测学国际会议”

2004 年：在 Vancouver（Canada）召开了“分形 2004 年会议”（8th International Multidisciplinary Conference），主题是：自然界的复杂性与分形

1993～2004 年：国家自然科学基金重视“复杂性与分形论”的

研究，设立专项资助，面向不同复杂系统的研究对象

(4) 分形和动力学

1981 年：Witten 和 Sander 提出 DLA 模型（Diffusion-Limited-Aggregation；Witten and Sander，1981）

1984 年：发现分形与动力学吸引子的关系（Hentschel and Procaccia，1984）

1984 年：细胞自动机模型（Wolfram，1984）

1988 年：Bak，Tang 和 Weisenfeld 提出自组织临界现象（Bak and Tang，1988）

1990 年：伯克得到广义维数的上下界和极限及多重分形的均匀性量度（C. Beck，1990）

1991 年：科维克等引入双变量迭代系统，最大特征值和吉布斯势导出维数、熵、李雅普洛夫指数，提供了对多重分形相变分类的一般方案（Z. Kov. acs，1991）

分形几何学目前用于从研究宇宙的起源和结构到地震的分布，在这样广阔的研究领域内，研究论文数目逐年快速增加，涉及分形的各种专题讨论会已近百次。新思想、新方法也大量涌现，不断地充实和完善着分形几何学的研究内容，使其越来越成为可与传统的欧氏几何学并驾齐驱的一种探索大自然奥秘的新手段。

练　习　题

1. 什么是分形和分维，试举一例说明？

2. 用下列迭代方式产生分形：

(a) 将线段[0，1]三等份，去掉中间的一段（Cantor 集合，长度 $L=?$）；

(b) 将等边三角形三边中点联线，等分 4 份，去掉中间的三角形（Sierpinski 垫片，面积 $S=?$）；

(c) 将立方体等分为 27 块，去掉各面中心以及体积中心的 7 小

块，保留 20 个小块（Sierpinski 海绵，面积 $S=?$ 体积 $V=?$）；画出这些迭代过程的前 3 级图形，计算分形的分维。可能的话，计算该分形的长度 L，面积 S 和体积 V。

3. 在单位正方形面积上等分成 l^2 个小正方形，去掉其中 m 个（$l \geqslant m+1$，l 和 m 皆为正整数），然后对保留的小正方形重复以上过程，证明所得到的分形的分维：

$$D=\frac{\ln(l^2-m)}{\ln l}$$

4. 平面上的二维 Cantor 集合是由两个一维 Cantor 集合相互垂直而构成（见图 1.20），证明其维数是一维 Cantor 集合的 2 倍，即

$$D=2\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

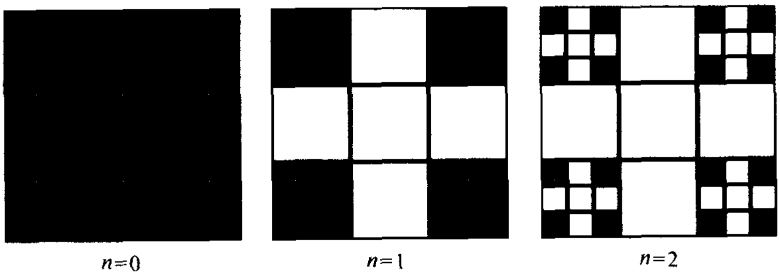


图 1.20　平面上的二维 Cantor 集合（前两级）

5. 运行本章中给出的产生 Koch 曲线的程序。

若对该程序的核心部分（有人譬谕为遗传密码）作修改：

```
        110'  FRACTAL BRANCH
        160   WINDOW (0, -1/3)-(1, 1/3)
220  C=2/3: B1=C: B2=0: B3=0: B4=-C
```

这时会产生什么样的分形，运行修改后的程序并观察之。

6. 假定单位线段第一次迭代后变为类似于 Koch 曲线的生成，图 1.21 左方的图案，试说明这种迭代方式生成的最终图案是分形的（图 1.21 右方），并分别计算其分维。

7. 证明图 1.22 所示迭代过程生成分形图形的分维

$$D=\lg 6/\lg 3$$

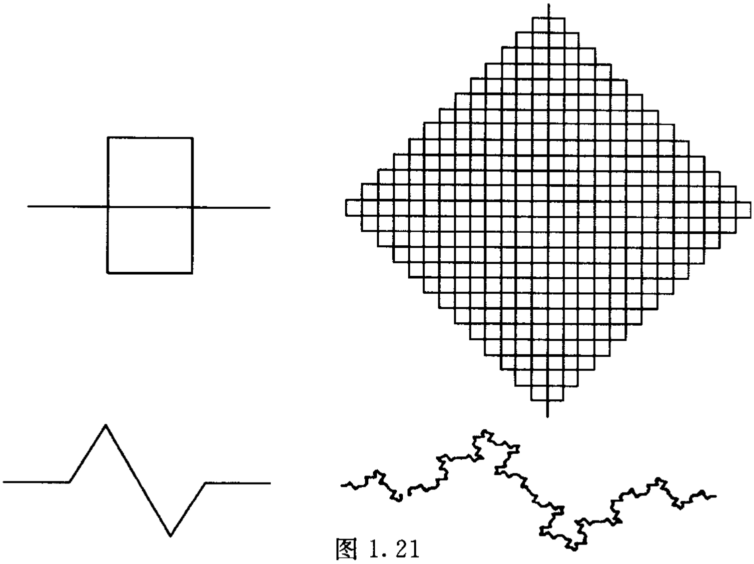


图 1.21

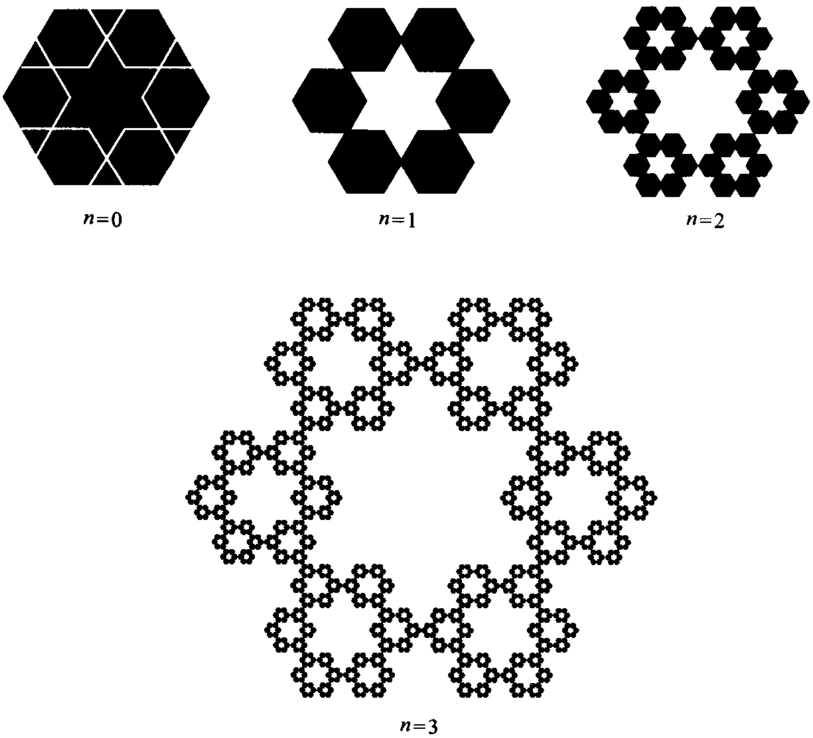


图 1.22

第二章　分形的原因

——相互作用、反馈和迭代

研究分形图形的复杂性时，总是要讨论形成这种复杂性的原因，也就是说，必然要涉及到动力学的问题。我们知道，山脉的形状是十分复杂的，无法用简单的圆锥形等几何元素来描述。正因为山脉的千姿百态，形状各异，因而使人们能够充分发挥想像力，将山脉比喻成各种各样美好的事物。于是"神女峰"、"莲花峰"、"天柱峰"等优美的名称以及与之相关的许许多多美妙的传说故事就应运而生，不断流传下来。但是在山脉形状复杂多样性的背后，人们不仅要问：为什么会有这么多的复杂形状呢？地质学家的研究表明，山脉的形状是长期地质构造运动和至今仍在进行的侵蚀作用的结果。那么能否由形状的复杂性推断出产生这种复杂形状的动力学过程？数学规律又为何？当然，回答诸如此类的问题是十分困难的。大多数人都会认为：复杂的形状是由复杂的动力学过程所造成的。是否真是如此呢？

在第一章中，通过大量数学分形的例子，我们已经看到：简单的生成规则在无限次迭代过程之后，可以生成极为复杂的分形图形。本章中，我们要用动力学的语言，再次讨论这一主题。

最简单的动力学模型具有三个要素：输入(IN)、输出(OU)和动力学的作用规律(PU)。图 2.1 给出了一个最简单的动力学模型示意图。

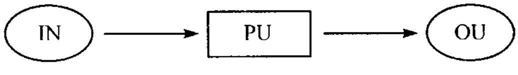


图 2.1　最简单的动力学模型

IN＝输入；OU＝输出；PU＝作用规律

早期，人们最熟悉的动力学理论，莫过于牛顿力学了，对于牛顿力学来说，PU 即为牛顿定律：

$$F = ma$$

F 是作用在物体上的力，通常是作为动力学系统的输入；a 是受到作用力后物体产生的加速度，通常认为是系统的输出；而作用规律：$F = ma$ 代表了系统作用规律的线性关系，即当输入增加 n 倍时，输出也相应增加 n 倍，输出与输入之间没有相互作用。这种动力学模型的核心思想是(原)因和(结)果的一一对应关系。以牛顿力学为代表的这种线性动力学模型已成功地应用了 300 多年，它能够解释许许多多的自然现象。但当讨论分形的产生过程时，我们却不能再采用这种线性模型，必须代之以一种非线性的、有相互作用的非线性模型。

2.1 相互作用——反馈和迭代

系统内部存在着相互作用的事实，人们早就有所认识。就地球系统而言，它包括大气圈、水圈、岩石圈和生活在其中的生物圈。各个圈层之间存在着相互作用，图 2.2 给出了大气科学家在研究天气变化时所使用的一个模型，他们不仅仅研究大气层的运动变化过程，而且还要研究来自水圈、岩石圈和生物圈的各种影响。

20 世纪末期，地球科学正经历着一场质的变化：原来分头描述地球上各种现象的学科，正在系统科学的高度相互结合，成为揭示机理、服务预测的“地球系统科学”。人们发现：吹向大洋的风尘长期增多能够造成大气降温，因为这样会增强海洋生产力，从而减少大气中二氧化碳的含量；智利海岸外鱼类的大批死亡和印尼岛屿上的森林火灾同出一源，因为都属于厄尔尼诺现象。地球真是一个整体，牵一发足以动全身。地球科学又一场新的革命性突破正在来临。

相互作用经常用反馈过程来模拟，例如，我们可以利用(图 2.3)所示的一台反馈机器来研究相互作用 。反馈作用的存在，使得具有

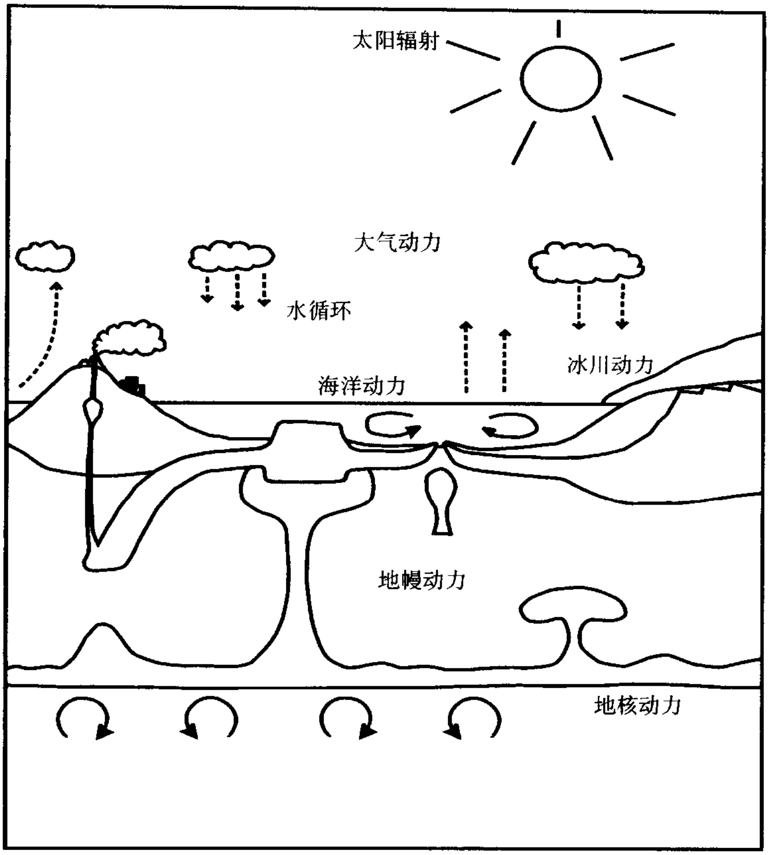


图 2.2 地球系统模型

地球系统包括外层空间、大气圈、水圈、生物圈、岩石圈和地球内部圈层。地球系统是一个整体，牵一发而动全身。例如地球表面的水在固体层、海洋层和大气层之间循环的事实，人们早就知道了。但考虑到地球固体部分、液体部分和大气部分的热容量的比值为 $10^6:10^3:1$，人们越来越重视水的循环在地球三部分热力学相互作用中的地位。诸如 EL Nino 等现象就是地球各圈层间存在着相互作用的证据

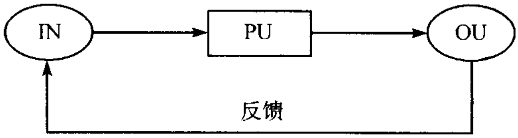


图 2.3 具有反馈(相互作用)的动力学模型

反馈作用的动力学系统与图 2.1 所示的(简单)线性动力学系统有了很大的不同。当模型中有一个输入时，按照模型中的作用规律，会得到与之相应的输出。这个由输入至输出的过程我们称为一次迭代。反馈的重要意义在于：第一次的输出会成为第二次迭代的输入。其原因(第一次输入)和结果(第一次输出)以及结果(第一次输出)和原因(第二次输入)不再是没有关系的了，而是出现了相互作用。这种反馈机器一次又一次地运转(迭代)，就代表了一个动力学过程的发展和演变。

现在举一个具有反馈功能系统的例子。假定我们有一台复印机，它能将输出的图形缩小 1/2 复印出来。我们把一幅图形放进复印机作为输入图形，然后可以得到一张缩小 1/2 的相似的图形作为第一次复印(迭代)的输出图形。按照具有反馈作用的动力学模型的作法，再把第一次复印结果作为下一次复印的输入图形。这样，我们将得到一系列越来越小的图形，而最后的图形会缩成一个点，再迭代下去已经没有任何意义(图 2.4)。这种具有单一缩小功能的复印机，只要迭代次数足够多，最后输出图形都会是一个点，而不管原始的输入图形如何。显然，尽管这种缩小复印机过程具有反馈功能，但它无助于复杂图形的产生。

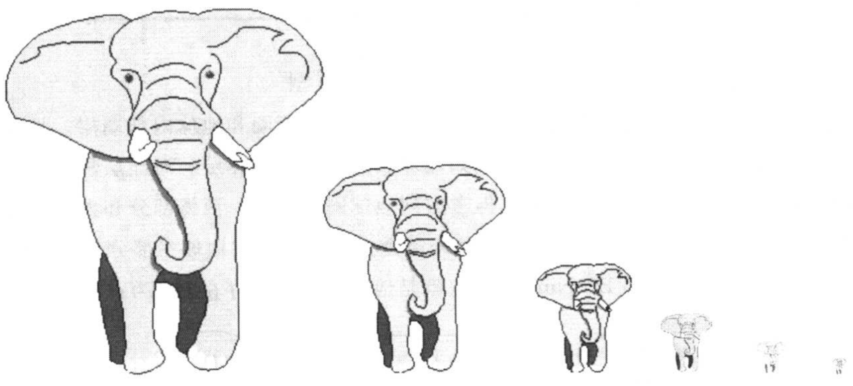


图 2.4　用具有缩小功能的复印机，连续进行复印，每次都用上一次复印结果作为本次复印的输入，多次复印后，最终得到的结果为一个点，图中最左方的大象是原始的输入图形，从左向右，依次是每次迭代后的图形

2.2 多功能复印机

多功能复印机是指：

一台复印机具有多个镜头；

每个镜头可以独立地对输入图形进行变换（如缩小，旋转等……）；

每个镜头成像的结果能安置在最后复印输出图形的适当位置。

图 2.5 给出了一台具有三个镜头的复印机，假定每个镜头的缩小率都是 1/2，而且每个镜头成像的结果（分别以黑色、灰色和白色来表示）如图 2.5 中右上角那样安置。现在我们来看一看，这台复印机会不会像只具有缩小功能的复印机那样，把所有的图形最终都缩小为一个点呢？假定现在我们用一个长方形作为原始的输入图形进行复印，由于有三个独立的缩小镜头，于是，第一次复印的结果得到了三个缩小的长方形，为了表示各个小长方形的来源，我们同样把这三个小长方形中加上了黑、灰和白的颜色，这三种颜色相应于上面复印机的黑、灰、白三个镜头（图 2.6）。

依此类推，第二次复印，我们可以得到 9 个小长方形。进一步

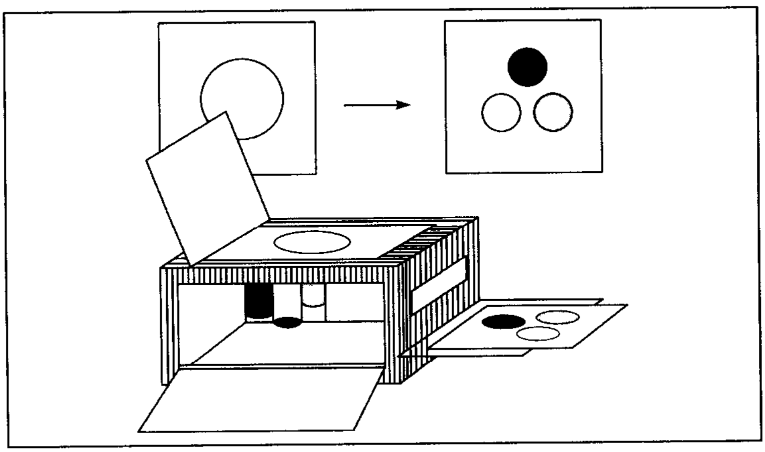


图 2.5　一台具有三个镜头的多功能复印机

（图中用黑色、灰色和白色表示三个镜头）

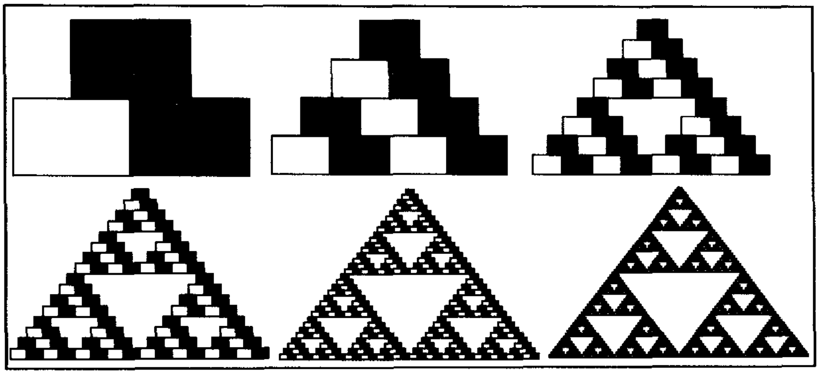


图 2.6　输入一长方形作为原始图形，用有三个缩小镜头的多功能复印机得到的前 5 次复印结果，右下图是无限次复印后的终极结果

还可得到 3^3，3^4，3^5…个小长方形。每个小长方形会变得越来越小，但总的集合不像具有单一缩小功能复印机的结果那样缩成一个点。实际上图 2.6 的终极结果正好是第一章讲过的 Sierpinski 垫片（图 1.10），它是一个典型的分形图形！我们利用相互作用、反馈和迭代，通过多功能复印机，造出了典型的分形图形。

关于多功能复印机，有三点是需要指出的。

第一，仔细分析图 2.6，有人会认为，最终得到 Sierpinski 垫片，是因为选择长方形作为原始的输入图形选得好。其实不然。为了说明这一点，我们可以随意选择 NCTM 几个字母作为原始输入图形。图 2.7 给出了前 5 次复印的结果和最终的图形。我们吃惊地发现，虽然最初几次复印结果不同于原始图形是长方形的情况，但很快地，多功能复印机的输出结果就与输入的原始图形无关了。也就是说，原始的输入图件的信息差别会很快消失，只要多功能复印机功能设定，最终的复印图件也就完全确定了。因此，不管原始图形是圆的、方的或外文字母，最终都会得到 Sierpinski 垫片。这台多功能复印机只会产生惟一的一种最终结果。这种多次复印（迭代）过程，通过一系列的中间结果，最后达到一种最终结果，而最终结果又与初始条件无关，这种性质在数学上叫做稳定性。

第二，上述多功能复印机是一个包含有三个缩小率均为 1/2，而

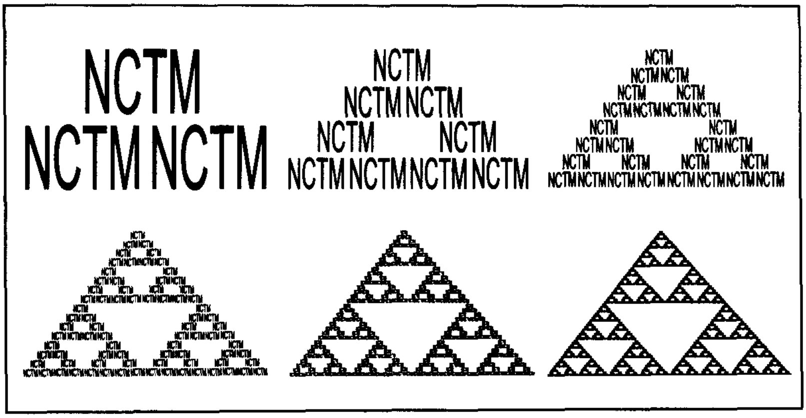


图 2.7 输入任意几个字母作为原始图形，多功能复印机还是会产生同样的一种终极结果

且镜头的相对位置固定的简单反馈机器，它相当于一个具有简单非线性作用规律的动力系统。而通过不断的反馈和迭代，如此简单的动力系统却产生出具有复杂结构的分形图形(Sierpinski 垫片)。这就对本章开始时提到多数人所认为的"复杂的形状来自复杂的动力学过程"的观点提出了挑战。事实上，大量的实验、观测都已经表明：长期的简单过程可以产生非常复杂的形状。

第三，多功能复印机能够得到稳定的最终图形，是受到三个因素的控制的：多个独立的镜头；无穷次迭代过程；反馈机器中的作用规律。现在的问题是，如果我们想得到一种最终的图形，如何来设计这台多功能复印机呢？一般说来，对这个问题的普适性的理论回答是很困难的。可行的工作，正如分形的奠基人 Mandelbrot 称之为"实验数学"所描述的那样，主要是利用各种反馈过程，看看它们究竟能产生什么样的图形。下面，我们逐步介绍几种常见的反馈过程和他们所生成的分形图形。

2.3 吸引子

多功能复印机的运转是由反馈过程来控制的。上一次的复印输出，即作为下一步的复印输入，不断地进行下去。上面谈过的多功

能复印机的几个要素，一般情况下是不难得到的。只要将一次复印的输入与该次复印的输出加以仔细比较，就可以知道该台复印机有几个镜头，每个镜头是放大、缩小还是旋转变换，以及不同镜头成像结果在输出时是如何排列的等等。

这里有一个十分特殊的情况。和前面一样，假定多功能复印机有3个镜头，每个镜头都缩小1/2，而且排列也和以前一样。在图2.8(a)中，输入图形是一个圆，图中给出了3次复印的结果，我们从上节讨论中可以知道，只要复印次数足够多，最终会得到Sierpinski垫片。图2.8(b)中的输入是任意的图形，3次复印后，初始的任意图形本身包含的信息已经所剩无几，多次复印后也必然会得到Sierpinski垫片的最终图形。图2.8(c)中输入的图形本身就是Sierpinski垫片，每次复印后，输出图形和输入图件都没有任何的变化。总结上面的实验结果：用多功能复印机不断地进行复印，不管输入图件如何，都会得到一幅一样的图形。这个最终图形就叫做这台多功能复印机的吸引子，也叫

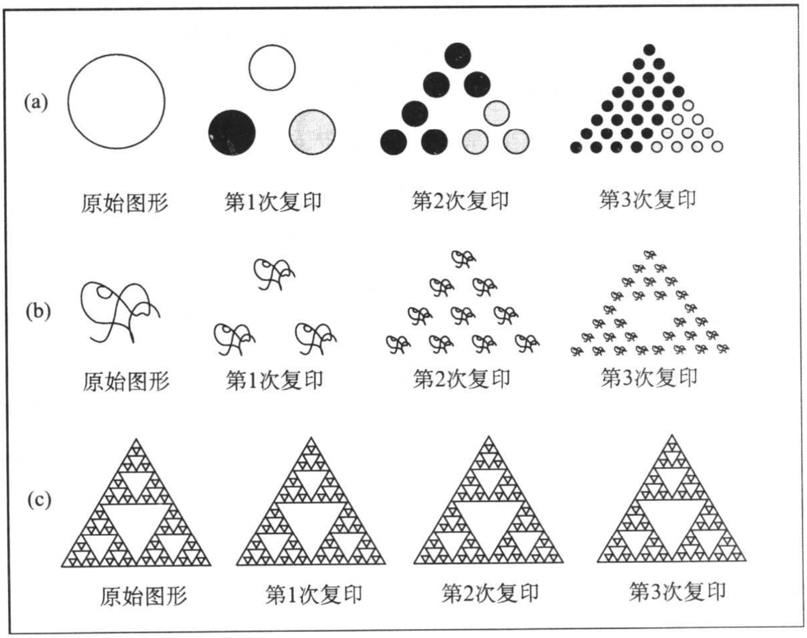


图2.8 用3种不同的图形作为原始输入图件，
多功能复印机前3次复印的结果

做这个迭代过程的吸引子。特别是当我们把具有分形特征的吸引子作为输入图形进行复印时，不管复印多少次，也不会发生任何变化，因此，对于给定的多功能复印机来说，吸引子是一个不变量。

为了更好地理解吸引子这个概念，我们作一些物理上的类比。假定我们有一只碗——它相当于一台多功能复印机，碗中有一小球，最初可以把小球放在碗内的任何位置——相当于各种不同的原始输入图件。不断观测小球从初始位置松开后，在碗中的运动情况(图2.9)。经过很长的时间，最后小球必然静止在碗底，这就相当于多功能复印机的最终输出图形。当然，小球在碗中的运动是连续的，而我们进行复印的过程是离散的，是一次又一次进行的。但这不影响我们的类比，因为我们关心的是演化的开始和演化的结束，连续和离散过程的差别并不重要。小球在碗中的运动是动力系统(dynamical system)的很形象的模拟。不管小球的初始位置在何处，最后都会停留在碗底(吸引子)，而且如果一开始就把小球放在碗的最低点(吸引子位置)，小球就不再运动，一直停留在该位置上，这相应于吸引子为多功能复印机的输入图形的情况。

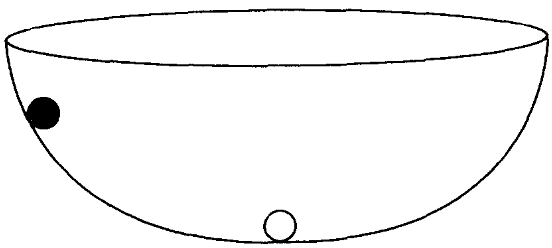


图 2.9 吸引子的物理类比

2.4 IFS ——迭代函数系

前面对反馈机器的输入，特别是多次迭代过程最终输出图形与输入的无关性作了介绍，也对反馈机器的输出，特别是最终输出图形的稳定性，引进了吸引子的概念。现在我们集中力量对反馈机器的PU——即作用规律作些讨论。

反馈机器的 PU(Processing Unit)作用规律对于反馈过程的重要性，就像遗传密码对于生物学，中心处理器(CPU)对于电脑的重要性一样。多功能复印机对反馈机器中的 PU 原理进行了直观的解释。因此从数学观点来说，反馈机器的 PU 最重要的作用是对图形进行适当的数学变换，Barnsley 等(1986)把 PU 的这种数学变换功能称之为迭代函数系(Iterated Functional System)，简写为 IFS。

假定一台多功能复印机有 N 个镜头，每个镜头对输入图形 A 的数学变换用 $\omega_1(1,2,\cdots,N)$来表示，则每个镜头产生的图形分别是$\omega_1(A)$，$\omega_2(A)$，…，$\omega_N(A)$，多功能复印机的输出图形用$W(A)$来表示，我们用集合论中的符号∪表示相加，这时有

$$W(A)=\omega_1(A)\cup\omega_2(A)\cup\cdots\cup\omega_N(A)$$

上式表示的就是 PU 的处理功能，也就是这台多功能复印机的 IFS(图 2.10)，对于具有反馈功能的系统，显然要求

$$A_{k+1}=W(A_k),\qquad k=0,1,2,\cdots$$

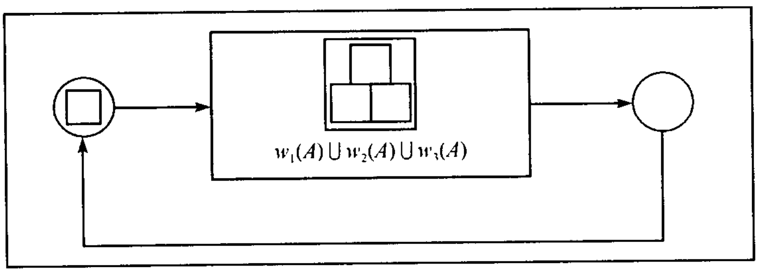


图 2.10　作为反馈机器的多功能复印机

反复应用上式，可以得到一系列的图形。最终的图形我们记为 A_∞，这就是前面介绍的吸引子。实际上，吸引子是由反馈机器的 PU 功能所决定的，所以把经过 PU 的 IFS 处理而得到的吸引子叫做 IFS 吸引子，吸引子的不变性可以表示为

$$W(A_\infty)=A_\infty$$

图 2.10 表示反馈机器的 IFS，它是由三个镜头的变换$\omega_1(A)$，$\omega_2(A)$和 $\omega_3(A)$组成的。这种代数表示 IFS 的方法很难反映出每个$\omega_i(A)$的具体变换内容。除了用上述代数语言描述 IFS 以外，最方便

的还是用图形来表示 IFS。不失一般性，假定原始图形为 1 张单位边长的正方形，并且为了清楚地表示这个正方形的旋转等变化，我们在该张纸的左上角写上一个“L”字母。

图 2.11 给出了用图形表示 IFS 的方法，它的左方是原始的输入图形，右方是经过一次 IFS 变换的输出图形。从图中可以看出，IFS 包括 3 个相似变换，每个变换的缩小率为 1/2，而且变换完毕每个小正方形被平移至互相衔接的位置。图 2.11 中上方的小正方形代表了图中的 $\omega_1(A)$，左下方和右下方的两个小正方形则分别代表了变换 $\omega_2(A)$和 $\omega_3(A)$。

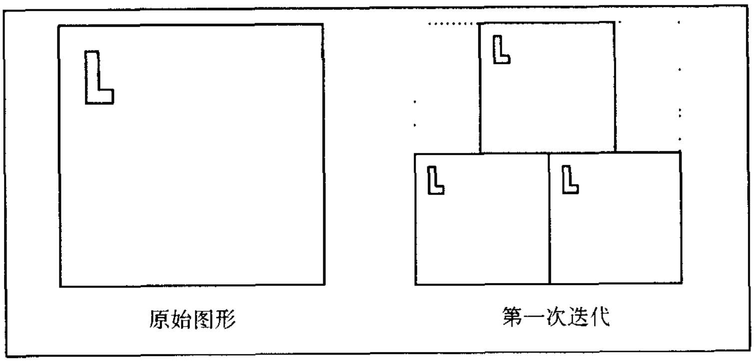


图 2.11 用图形方法表示 IFS

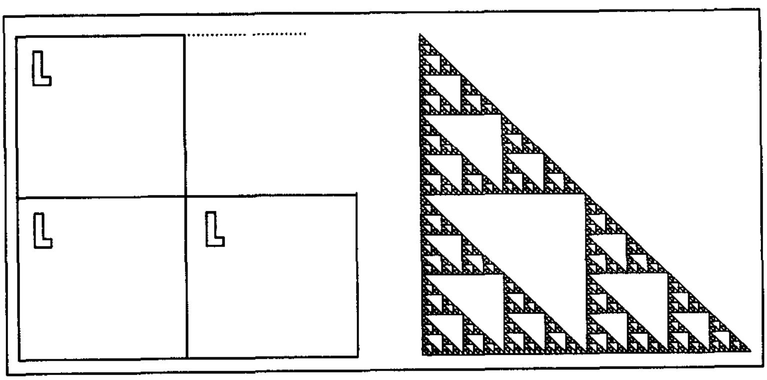


图 2.12 IFS 由 3 个缩小率为 1/2 的相似变换而成，但变换后 3 个小正方形的相对位置与 2.11 不同，右方为这种 IFS 的吸引子

图 2.12 的 IFS 包括了缩小率为 1/2 的三个相似变换，但缩小后的三个小正方形的位置与图 2.11 不同，图 2.12 右方是该 IFS 变换的吸引子，它是 Sierpinski 垫片的一个变种。图 2.13～图 2.18分别给出了用 IFS 生成各种各样复杂图形的一些例子。

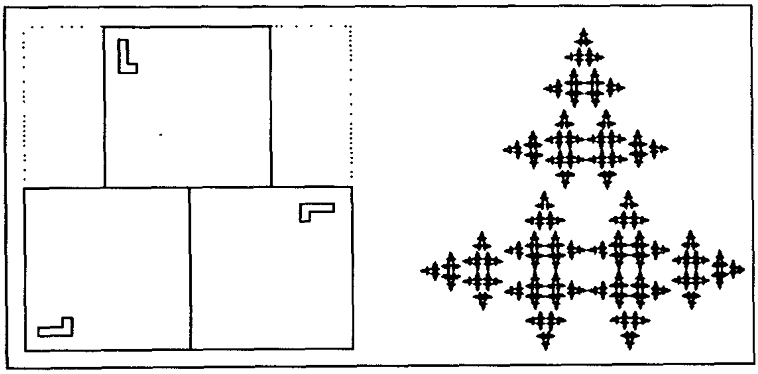


图 2.13 IFS 也是由 3 个缩小率为 1/2 的相似变换组成，左下方小正方形逆时针旋转 90°，而右下方则顺时针旋转 90°，有的人称其吸引子为“圣诞树”

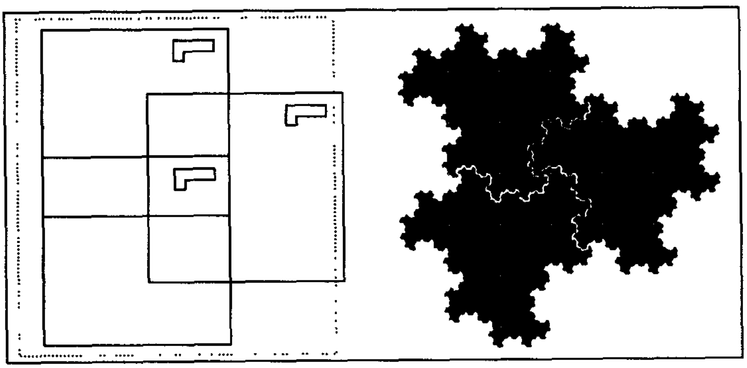


图 2.14 IFS 由 3 个缩小率为 $1/\sqrt{3}$的相似变换组成，且均顺时针旋转 90°，图右方吸引子的白色曲线表示该吸引子可以分成三个对称而自相似的部分

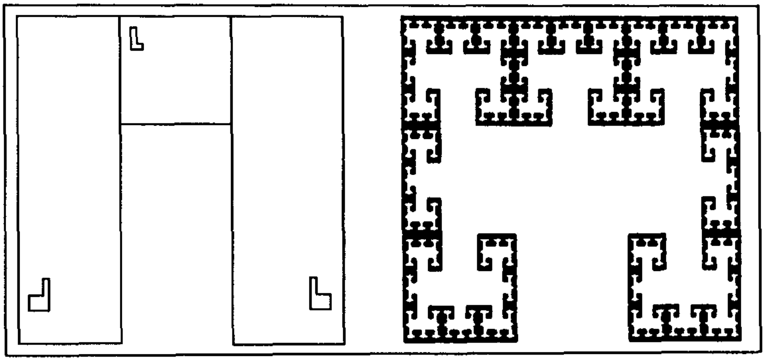


图 2.15　这个 IFS 是由一个(中间的)相似变换和两个旋转仿射变换组成的，其吸引子叫 Cantor 迷宫

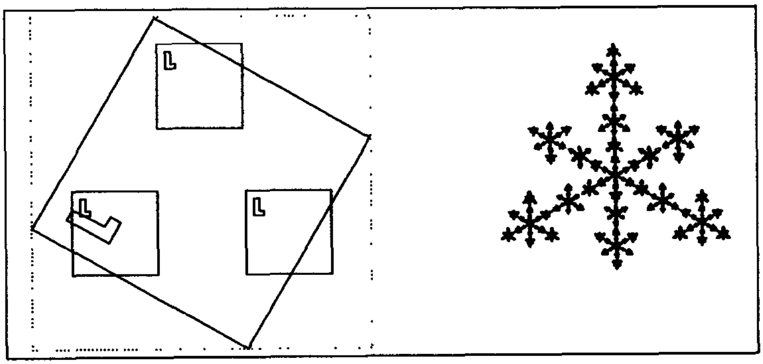


图 2.16　IFS 由 3 个小的相似变换和一个大的旋转变换组成，吸引子看起来像雪花结晶

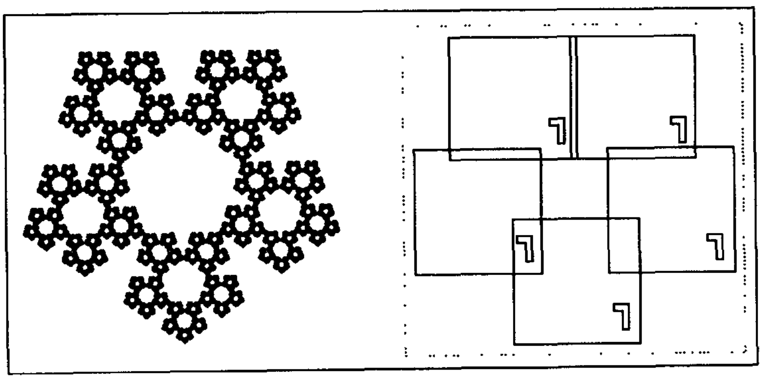


图 2.17　IFS 由 5 个小的相似变换组成，吸引子像天然晶体

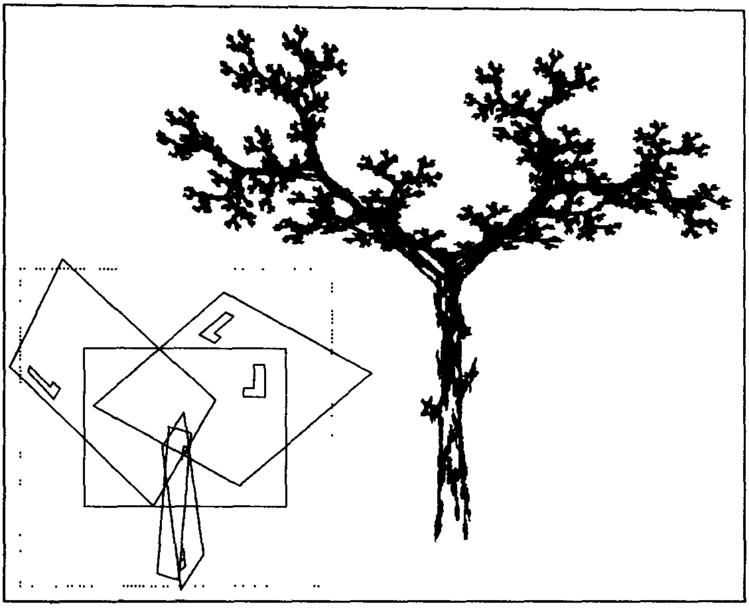


图 2.18　这个吸引子酷像一棵树的形状，它是由 5 个线性变换组成的 IFS 形成的，IFS 的参数见本章的附录：线性变换一节

通过上面的几个例子，说明给定了 IFS，就能产生出许多种类的分形图形。

2.5　非线性的反馈过程

研究一个反馈系统的演化，可以利用上面介绍的多功能复印机方法，也可以使用一些图示方法，下面我们来研究一个著名的反馈系统。

图 2.19 这种反馈系统的显著特点在于作用函数 PU 是非线性，而在这之前我们介绍的所有反馈系统的 IFS 都是线性的，二次非线性作用函数常见的形式有：

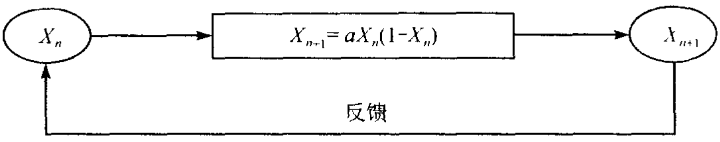


图 2.19　一个特殊的反馈系统

$$P_{n+1}=P_n+rP_n(1-P_n)$$ （人口增长方程，May，1976）

$$x_{n+1}=x_n^2+C$$ （Mandelbrot 集，1982）

实际上，上述两个反馈过程都可以变换成 $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ 的形式。以人口增长方程为例，令

$$x_n=\frac{r}{r+1}P_n,\ a=r+1$$

则

$$x_{n+1}=\frac{r}{r+1}P_{n+1}=\frac{r}{r+1}[P_n+rP_n(1-P_n)]$$

$$=(r+1)\frac{r}{r+1}P_n\left(1-\frac{r}{r+1}P_n\right)$$

$$=ax_n(1-x_n)$$

我们从 $y=ax(1-x)$ 的函数关系开始，这个函数在 x-y 坐标系中是一支向下开口的抛物线，抛物线与 x 轴的交点是（0，0）和（1，0）。这两个交点的位置不随 a 而变化。当 $x=0.5$ 时，抛物线取极大值 $a/4$（图 2.20），为了方便计算，我们还在 x-y 平面上画一条过原点的单位斜率的角平分线，这条线与两个坐标轴距离相同。

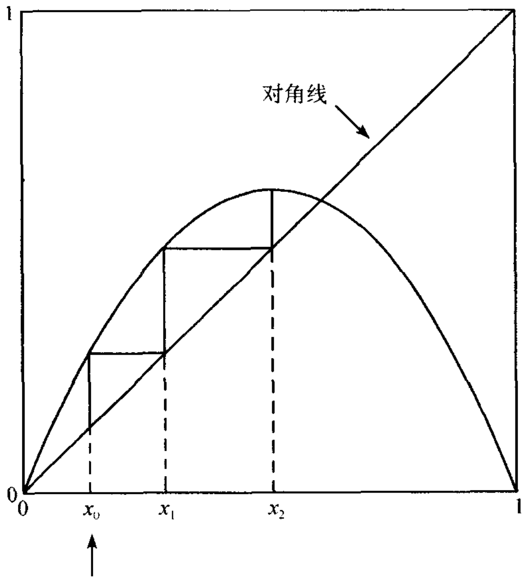


图 2.20　求解 $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ 的图示法

现在考虑迭代过程，从 x 轴上的任一点 x_0 出发，垂直向上作一直线与抛物线相交，过交点再作一水平线与角平分线相交。这个交点的坐标即为 x_1 的值。再从角平分线上相应的 x_1 点出发，先作垂线向上，然后折而水平，与角平分线交点即为 x_2，依次类推。

图 2.21 和图 2.22 给出了对于 a 取不同值的迭代结果，当 $a=1.45$时，迭代反馈曲线就像一条爬楼梯的曲线，不管初始值如何，都很快收敛于抛物线与角平分线的交点。当 $a=3.2$ 时，最终迭代结果在两个值之间轮流跳动，表现出了周期性，出现了两个稳定状态。从一个稳定状态向两个稳定状态的转化叫做“分岔(bufication)”。当 $a=4$ 时，最终迭代结果出现了不稳定，x_{n+1} 有可能取(0，1)之间的任何值，这时表现为“混沌”。

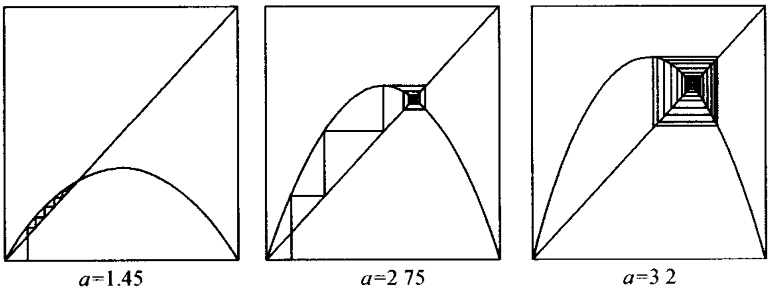


图 2.21　不同 a 值时 $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ 的反馈迭代过程

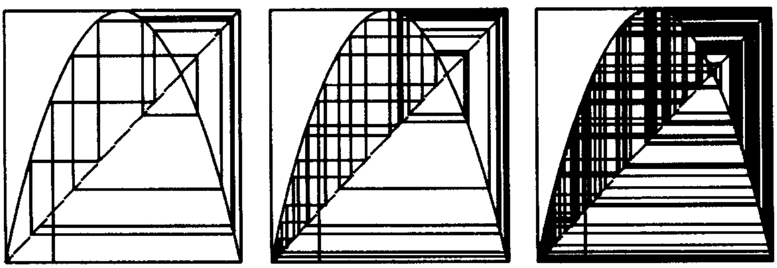


图 2.22　$a=4$ 时出现了混沌

上述图示方法既可以用尺子简单地从图上标出，也可以通过下面的计算机程序来实现(表 2.1)。改变计算机中 a 的取值，可以看到

这样一个非线性反馈系统的演化过程。

表 2.1 计算 $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ 的计算机程序

```
Basic Program   Graphical Iteration
Title           Experiments for the quadratic iterator

INPUT "Parameter a, start x0", a, x0
left=30
w=300
m=1
imax=10

REM DRAW BISECTOR AND FUNCTION
LINE (left+w, left)-(left, left+w)
FOR i=1 TO w
    xn=i/w
    FOR k=1 TO m
        xn=a * xn * (1-xn)
    NEXT k
    LINE-(i+left, left+w * (1-xn))
NEXT i

REM START AT x0
xn=x0
PSET (left+w * xn, left+w)
FOR i=1 TO imax
    REM EVALUATE FUNCTION
    FOR k=1 TO m
        xn=a * xn * (1-xn)
    NEXT k
    REM DRAW VERTICAL AND HORIZONTAL LINE
    LINE-(left+w * x0, left+w * (1 - xn))
    LINE-(left+w * xn, left+w * (1 - xn))
    x0=xn
NEXT i
END
```

从上面的例子中，我们可以看到，简单的多功能复印机经过多次反馈作用后可以产生复杂的分形图形，简单的二次非线性方程在一定条件下进行迭代，最终结果出现了不稳定——混沌现象。事实上，这种简单的系统经过反复相对作用产生出复杂结果的规律已被许多事实所证实。

从典型分形图形反复迭代的生成过程到给平静流体施加一定扰动后出现“突变”——湍流；从纽约市的麻疹记录到两百年来加拿大山猫的群体数量涨落；从 Lorenz 的“决定性非周期流”（Lorenz，1963)到李天岩和 Yorke 的“周期 3 意味着混沌”（Li and Yorke，1975)。这些事实伤害一般实践家直觉的原因，就在于它们所代表的系统中存在着非线性的反复作用，哪怕是最简单的非线性！正如“人口方程”的创始人——生物学家 May 在他发表于 1976 年《自然》杂志上的一篇综述性文章中所论述的，不管线性数学已经发展得多么高，Fourier 变换、正交函数，以及它们的回归技巧，都只能给人们一个关于实际大自然普遍存在的非线性的事实之失真形象。如此发展起来的数学直觉会使人们“即使看到离散非线性系统里最简单的古怪行为也会手足失措”（May，1976)。

“不仅仅在研究中，而且在日常生活的政治、经济中，如果更多的人了解到这最简单的非线性系统也未必有简单的动力性质，会大有裨益”。May 的这段精彩的文字其实是告诫人们面对似乎十分复杂的现象，它的背后未必不是简单的数学模型，而这数学模型的最本质特征就是非线性的相互作用。

在结束本章时，有三点应当强调：

第一，分形几何是描述自然界复杂对象的数学工具之一，在许多情况下，这种复杂性往往具有相对的性质。例如，对于一条 Koch 曲线，从传统的欧氏几何角度出发，用直尺去测量其长度，Koch 曲线包含了无限的层次，用什么样的尺子也难以将其长度测量准确。因此，我们说，Koch 曲线是十分复杂的图形。但当我们用一个看起来很奇怪、很复杂的小 Koch 曲线(吸引子)作为尺子的测量单位，所得结果就十分的简单。对于这种复杂的现象，人们不禁要问，如何

才能找到一种测量单位，使得复杂图形中的简单规律显现出来呢？这个问题我们将在第三章“分形测量”中给予回答。

第二，自然界中许多事物之间存在着相互作用。这种相互作用的结果，形成了相互作用的几个方面之间的非线性制约，进而出现了多种多样的发展前景。研究相互作用属于动力学的范畴。本章中列举的许多例子表明，讨论生成复杂现象的原因，必然要涉及到非线性的相互作用，也就是要涉及到动力学的问题。

第三，今天我们看到的自然界，是经过了漫长岁月演化而来的结果，年复一年，日月往复。短时间内的相互作用，往往是一个方面起优势主导作用，相互作用的结果不明显。然而对于几万年、几百万年的时间尺度，相互作用在长期演化过程中是不容忽视的。

以上三个方面用数学语言可以简单地概括为：吸引子、反馈和无穷次的迭代过程。正是这些因素，才导致了分形的产生，引起了人们对于分形几何与系统动力学之间内在联系越来越多的重视。Peitgen 等称“吸引子、反馈和迭代”为分形几何的“脊柱”（Peitgen 等，1995）。而另一位科学家 Lauwerier 在他写的“分形”一书中，副标题是：“无限重复的几何图形”（Lauwerier，1991）。

显然，在研究具有长期演化过程的自然科学分支中，分形几何将得到越来越广泛的应用。

附录　线性变换

多功能复印机的功能，即反馈机器的 PU 的作用，实际上是对输入的图形进行了一次性变换（当然，这种变换也可以是非线性，我们这里已介绍）。

假定二维平面上的点 P_1 和 P_2 的坐标是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，我们可以写成

$$P_1=(x_1, y_1), P_2=(x_2, y_2)$$

显然有

$$P_1+P_2=(x_1+x_2, y_1+y_2)$$
$$SP=S(x, y)$$

式中 S 为一常数。

如果有一变换 F，它将平面上的 P 点变到 $F(P)$ 点，而且满足：

$$F(P_1+P_2)=F(P_1)+F(P_2)$$

$$F(SP)=SF(P)$$

则我们称这种变换 F 为线性变换。记 $P=(x, y)$，$F(P)=(u, v)$线性变换的普遍公式是

$$u=ax+by+e$$

$$v=cx+dy+f$$

线性变换可以对原始图形进行放大、缩小、剪切变形、旋转、对称等许多操作，所有这些操作都取决于常数 a，b，c，d，e，f 的取值。有兴趣的读者可以参阅任意一本线性代数或矢量分析的教科书。本章第 3 节列举的 IFS 中所包含的各种变换的参数取值，列于表 2.2，有兴趣读者可以对照表 2.2 中的参数取值重新研究第 3 节中介绍的几种 IFS。

表 2.2　图 2.12～图 2.18 中 IFS 变换中的参数取值表

a	b	c	d	e	f
图 2.12					
0.500	0.000	0.000	0.500	0.0000	0.0000
0.500	0.000	0.000	0.500	0.5000	0.0000
0.500	0.000	0.000	0.500	0.0000	0.5000
图 2.13					
0.000	−0.500	0.500	0.000	0.5000	0.0000
0.000	0.500	−0.500	0.000	0.5000	0.5000
0.500	0.000	0.000	0.500	0.2500	0.5000
图 2.14					
0.000	0.577	−0.577	0.000	0.0951	0.5893
0.000	0.577	−0.577	0.000	0.4413	0.7893
0.000	0.577	−0.577	0.000	0.0952	0.9893
图 2.15					
0.333	0.000	0.000	0.333	0.333	0.6666
0.000	0.333	1.000	0.000	0.666	0.0000
0.000	−0.333	1.000	0.000	0.333	0.0000

续表

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
图 2.16					
0.255	0.000	0.000	0.255	0.3726	0.6714
0.255	0.000	0.000	0.255	0.1146	0.2232
0.255	0.000	0.000	0.255	0.6306	0.2232
0.370	−0.642	0.642	0.370	0.6356	−0.0061
图 2.17					
0.382	0.000	0.000	0.382	0.3072	0.6190
0.382	0.000	0.000	0.382	0.6033	0.4044
0.382	0.000	0.000	0.382	0.0139	0.4044
0.382	0.000	0.000	0.382	0.1253	0.0595
0.382	0.000	0.000	0.382	0.4920	0.0595
图 2.18					
0.195	−0.488	0.344	0.443	0.4431	0.2452
0.462	0.414	−0.252	0.361	0.2511	0.5692
−0.058	−0.070	0.453	−0.111	0.5976	0.0969
−0.035	0.070	−0.469	−0.022	0.4884	0.5096
−0.637	0.000	0.000	0.501	0.8562	0.2513

练　习　题

1. 进行如下图所示的 IFS 变换，IFS 由 4 个缩小率为 1/2 的相似变换组成，猜这种 IFS 变换的吸引子。

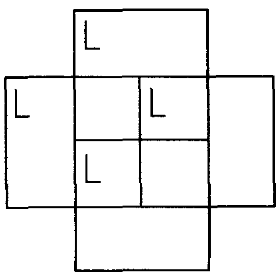


图 2.23

2. 地球系统内部的各种因素相互作用，例如 EL Nino 等现象就是地球各圈层间存在着相互作用的证据。请列举其他能说明地球系统相互作用的例子，并说明理由。

3. 通过如图 2.11 所示的 IFS 变换，最终可得到 Sierpinski 垫片，而通过如图 1.10 的基本作法，也可得到 Sierpinski 垫片。这两者之间有何区别和联系?

4. 通过图 1.22 的基本作法得到的图形与图 2.17 的 IFS 迭代的吸引子非常相似，比较两图，请问通过什么样的 IFS 迭代可得到 1.22 的图形?

第三章　分形测量

几何学有两个任务，一是对图形进行分析，二是对图形进行测量。对正方形对角线的测量，理论上导出了无理数概念。对一个圆的周长的测量，得到了重要的常数 π。对一个封闭面积的测量，在很大程度上，促进了微积分的发展。

多数人认为，今天测量问题已经解决了。无论是测量长度、面积，还是体积，只要想测量，我们就可以进行测量，遇到的无非是一些具体的技术问题而已。其实不然。Mandelbrot 举了一个例子：关于西班牙和葡萄牙两个国家之间边境线的长度，西班牙的百科全书中说长 616 英里，而葡萄牙的百科全书中却记载为 758 英里，问题是谁对谁错？许多人测量英国海岸线的长度，结果皆不相同，多在 4500～5000 英里之间，现在人们在野外进行测量时，都使用各种各样的测量仪器，包括采用高精度的空间测量技术，那么为什么不同人的测量结果不一样呢？这其中可能存在更深层次的(而非技术性的)问题。1967 年，Mandelbrot 在《科学》杂志上发表了一篇著名的文章"英国的海岸线有多长?"，专门讨论了这个深层次的问题(Mandelbrot，1967)。

我们遇到的一类曲线，例如一个圆，它具有确定的圆周长度：πd，d 是圆的直径。当我们用不同长度的尺子去量圆周长度时，得到的长度虽然不是 πd，当尺子越来越小时，测量结果就越来越接近 πd，换句话说，测量结果的极限值是一个确定的长度。我们遇到的另一类曲线，无论测量用的尺子如何变，始终得不到一个确定的极限值。其中的原因，不是技术方面的，而必须从理论上加以分析。

3.1 分形曲线的测量和幂律(power law)

在第一章的 1.3 节，通过生成 Koch 曲线的迭代公式，可以计算出无限次迭代后生成的 Koch 曲线具有无限长的长度。现在的问题是，当我们测量自然界一条实际的曲线，例如英国海岸线的长度时，并不知道这条曲线的生成迭代公式，我们只知道这条曲线是经历了长期侵蚀、沉积等地质构造运动的结果，要知道这条曲线有多长，惟一的方法就是对其进行测量。实际的作法是在地图上，而不是真正沿着海岸线进行测量。取来一幅1∶1 000 000的英国地图，用不同长度的尺子去测量，近似把英国边界用一个以该尺子为边的多边形来逼近，这个多边形就作为海岸线形状的近似表示。表 3.1 给出了不同长度 s 的尺子所测得的海岸线长度 u 的数据。

表 3.1　不同长度尺子 s 测得的海岸线长度 u

尺子 s/km	测得的海岸线长度 u/km
500	2600
100	3800
54	5770
17	8640

从表 3.1 我们看到了一个非常令人吃惊的结果，即所用的尺子越短，用该尺子相应的多边形去逼近英国海岸线就越逼真，而所测量得的海岸线也越长。从图 3.1 可以看出，在英国北部的苏格兰有许多小的海湾，如果用长尺子去测，用多边形去逼近，这些细微的弯曲都被忽略了。

作为另一类，即所谓规则曲线的代表，我们讨论了一个直径 1000 km 的圆周长度测量问题。之所以选 1000 km 作直径，是让它的圆周长与英国海岸线长度可作比较。我们也用等边长的多边形去逼近这个圆。表 3.2 给出了多边形边数，每个边长的公里数和最后求得的圆周长度的结果。

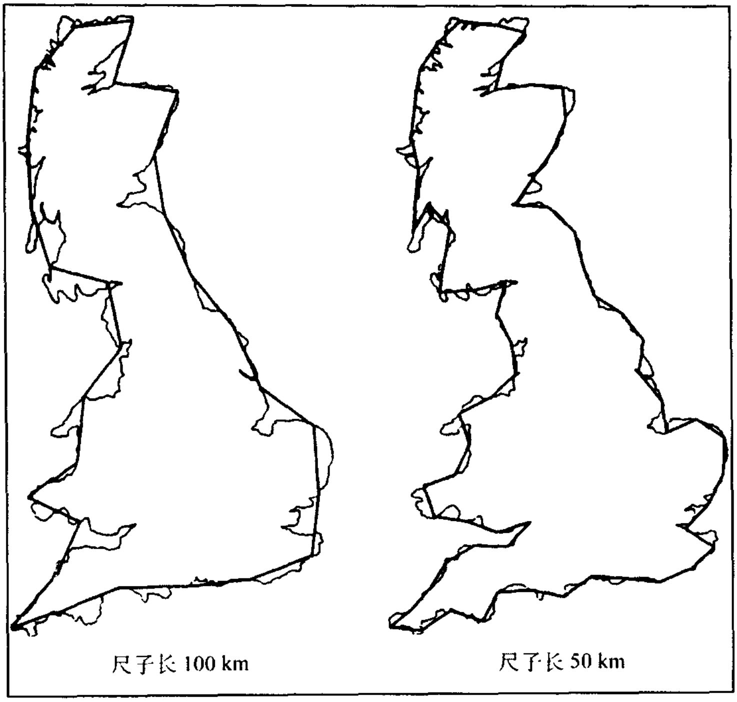


图 3.1 用多边形近似去测量海岸线

左边多边形边长为 100 km，右边为 50 km

表 3.2 用多边形逼近法测量直径 1000 km 圆的圆周长度的结果

多边形的边数	边长 s/km	测得的圆周长度 u/km
6	500	3000
12	259	3106
24	131	3133
48	65	3139
96	33	3141
192	16	3141

由于表 3.1 和表 3.2 多边形的边长从数 km 变至数百 km，所以，我们把表 3.1 和表 3.2 中的数据画在双对数坐标系上(图 3.2)，该坐标系中横坐标是尺度 s 倒数的对数，尺子越小，测量结果就会越精

确。所以把 $1/s$ 看成是测量精度的一种度量，$1/s$ 越大，测量精度就越高。测量长度的对数则用纵轴表示。图 3.2 给出了英国海岸线和一个直径 1000 km 大圆的测量结果。

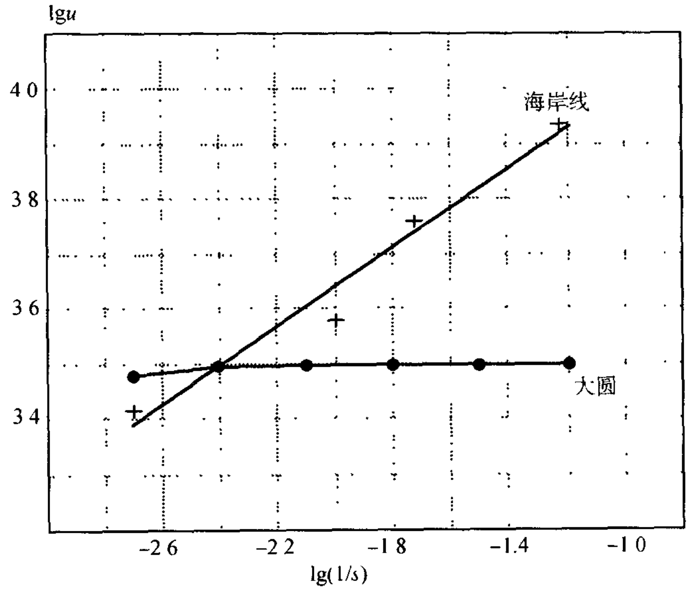


图 3.2　英国海岸线和 1000 km 大圆的多边形近似的测量结果

s 是用 km 表示的测量用的尺子长度，u 是测量得到的曲线长度

两组测量数据都各自落在一条直线附近。1000 km 大圆的数据落在一条斜率为 0 的水平线上，而英国海岸测量结果可以近似地用一条倾斜直线来代表，用最小二乘法可以求出这条直线的斜率约为：$d \approx 0.36$。我们把英国海岸线数据在双对数坐标中得到的直线叫做拟合线，$d \approx 0.36$ 就是这条拟合线的斜率，将 $s=1$ km时拟合线与纵轴交点所对应的数值记为 b，显然拟合线方程是：

$$\lg u = d \lg \frac{1}{s} + b \tag{3.1}$$

这样，我们可以根据上式来外推，当选用更小的尺子时，其测量结果如何的问题。将式(3.1)改写为

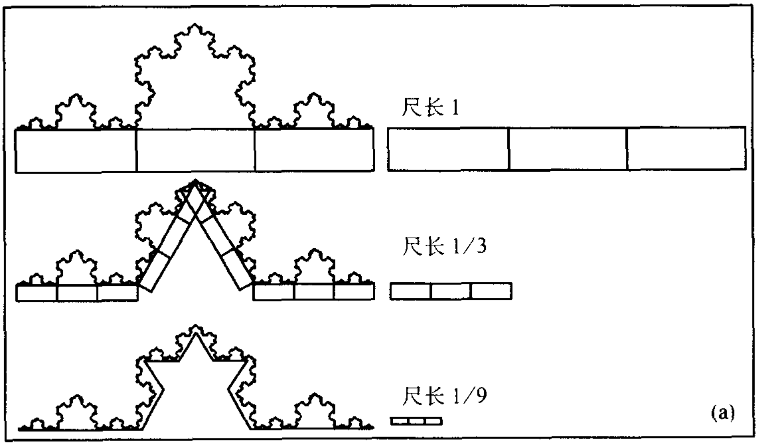
$$u = c\left(\frac{1}{s}\right)^{d}$$

由上式，可得

$$u \propto \frac{1}{s^{0.36}} \tag{3.2}$$

这表示，当所用尺子的长度 s 趋近于零时，英国海岸线的长度趋于无穷。当然，从理论上来讲，这个说法是对的。但从实际情况来看，由于整个测量是基于地图进行的，而对于任何地图，s 都存在一个下限，超过这个下限，s 再进一步变小时，测量工作就无法进行了。因此，u 的增加必定具有相应的上限。

式(3.2)所显示的长度 u 和尺长 s 之间存在着的幂指数函数形式，我们叫做存在着幂律(power law)，u 与 s 之间幂律的存在，说明仅仅讨论海岸线多长是不够的，真正重要的是，在一定范围(指测



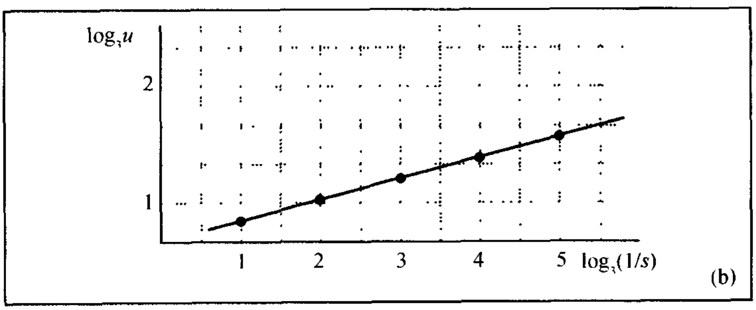


图 3.3　不同测量尺子给出的测量结果

(a) 用不同长度的尺子去测量 Koch 曲线的长度；(b) 尺长 s 和线长 u 的关系

量尺度 s 的可能变化范围)内，海岸线长度服从幂律，这才是海岸线最重要的特征。

应用上面的方法，我们可以从另一角度讨论 Koch 曲线的长度。令用于测量的尺子长度分别为 1/3，$1/3^2$，$1/3^3$，…，$1/3^k$，图 3.3 给出了这些测量的结果，由图 3.3(b)中直线斜率，可以得

$$\log_3 u = d\log_3\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$d=\log_3\left(\frac{4}{3}\right)\approx 0.2619$$

这个 d 值略小于英国海岸线求出来的 $d\approx 0.36$ 的数值，似乎表明，海岸线比 Koch 曲线具有更多的弯曲和更高的复杂程度。

本节的最后，我们再来讨论关于西班牙和葡萄牙相邻的国境线长度问题。与西班牙相比，葡萄牙是个小得多的国家，因此，在进行国境线测量时，所用的尺子也比西班牙要小，同样的边境线，用小尺子去测量必然会得到较大的数值，这就是本章一开始讲的，葡萄牙百科全书中记录的国境线较西班牙的结果为长的原因。

3.2 分维

上节对英国海岸线长度的讨论，数学家认为是一个病态的例子。海岸线最本质的特点，是存在幂律，而其长度数值倒显得不那么重要。实际上，当改变测量尺度时，图形或物体的长度、面积和体积，甚至于质量，都随之变化，这些变化都与图形或物体的分维有关。事实上，早在 Mandelbrot 对英国海岸线有多长产生质疑之前，Wilson 就已提出了类似的问题，并对真实物质的某些量进行了分析。例如粒子的质量，一向被认为是一个常量，众人皆知，任何经验中的物体质量是固定的。而 Wilson 采用以量子论的一部分进入物理学的重整化群方法推翻了这个常识。把质量这样的量看成是不固定的，似乎随测量者测量尺度的大小变化而上下浮动。这在当时是多么荒唐，而在分形科学发展的今天看来却并不荒唐。正是 Wilson 的工作

完善了研究分形几何对象的重要手段——重整化群的基础理论，为现实系统的实际计算提供了有力途径。

无论是 Wilson 所研究的物体的质量，还是 Mandelbrot 所讨论的海岸线长度，它们所具有的规律性都体现了分形几何中的标度不变性原理。而这种标度原理的外在表现则反映于物体的质量或长度与物体分维之间的关系上。本节和下一节就来具体地讨论这些关系。

我们先从讨论相似变换开始。图 3.4 是在平原上的一段平直的铁路，将该图左方小方框中图形放大后，所得到的放大图形(图的右方)与原来的图形看起来完全一样，这是一个具有相似性的例子。在讨论分形几何时，我们不是讨论一般的相似概念，而是讨论自相似(self-similar)。自相似的严格定义是：将一图形任意地划分为许多小的图形，而各个小图形都是原来图形的复制品。

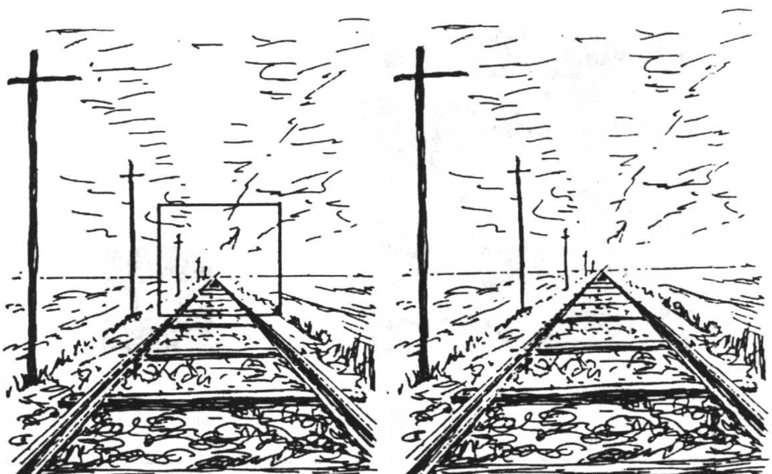


图 3.4　相似变换图

左方图中小方块内图形，放大后(右图)与原来图形相似

如果我们将一个自相似图形缩小 S 倍，原来的图形包括了 a 个缩小的图形，从自相似角度定义的分维 D 可以由下式得出，

$$a=\frac{1}{S^D}$$

或

$$D=\frac{\lg a}{\lg(1/S)}$$

图 3.5 给出几个典型分形图形的结果。

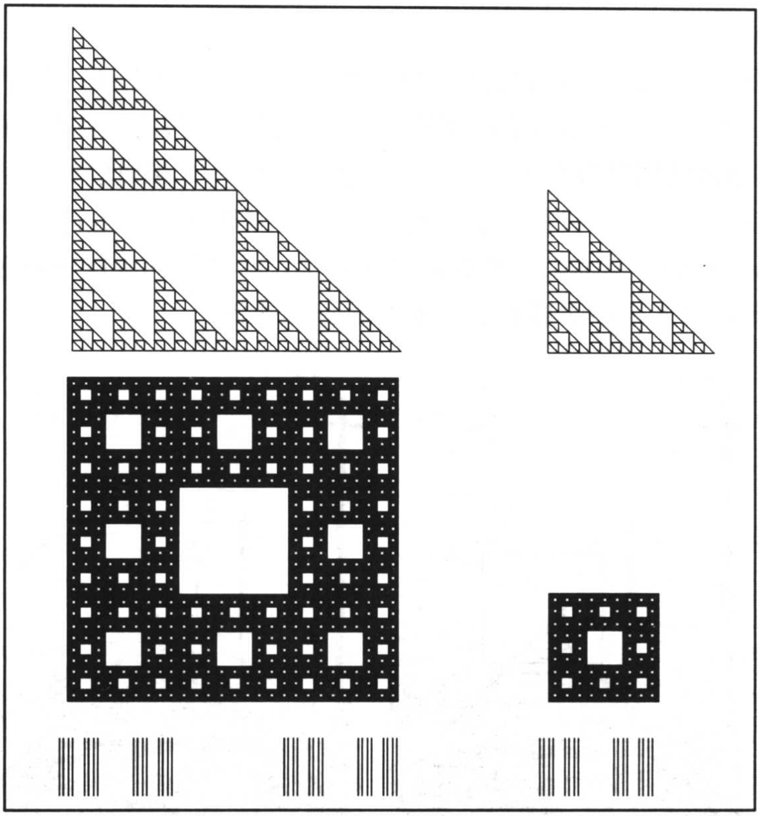


图 3.5 几个典型分形的分维

上图(Sierpinski 垫片)：$S=1/2$，$a=3$；中图(Sierpinski 地毯)：$S=1/3$，$a=8$；下图(Cantor 集合)：$S=1/3$，$a=2$

现在我们来研究上节海岸线长度幂律中的 d 值与分维 D 之间的关系。因为海岸线总长度等于尺长 S 与测量次数 a 之积：

$$u=a\cdot S$$

则

$$\lg u = \lg a + \lg S$$

而

$$\lg a = D \cdot \lg\left(\frac{1}{S}\right)$$

$$\lg u = d \cdot \lg\left(\frac{1}{S}\right)$$

简单推导可以得出：

$$D = 1 + d$$

于是，通过海岸线长度的幂律指数 d 可以求出分维 D，反过来，知道了 D 也可以方便地求出 d 来。

1985 年，M. Sernetz 发表了一篇论文，研究包括人在内的几种动物的质量 w 和新陈代谢率(metabolic rate) m 之间的关系，他发现：

$$\lg m = \alpha \lg w + \lg c$$

或

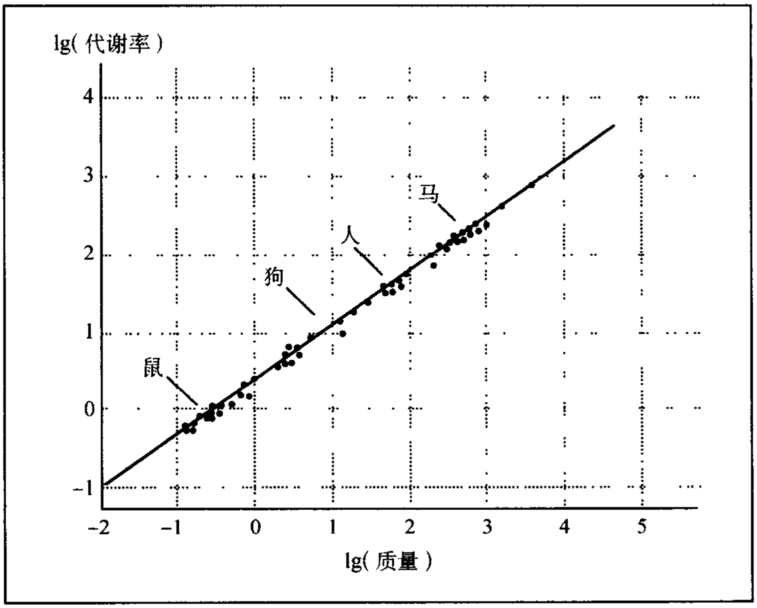


图 3.6　几种动物(包括人)的新陈代谢率(纵轴)和质量(横轴)的关系(Sernetz，1985)

$$m = cw^{\alpha}$$

其中 $\alpha = 0.75$。原来人们猜测新陈代谢率是和动物的质量成比例的，但 $\alpha = 0.75$ 的结果表明，动物的许多器官结构具有分形的几何形态（如第一章中所举的人的血管和肺的例子）。从这以后，分形几何在生物研究中也得到了重视和应用(图 3.6)。

3.3 数盒子法(Box-Counting method)

这是一种常用的计算分形图形分维的实用方法。取边长为 r 的小盒子(可以理解为拓扑维为 d 的小盒子)，把分形覆盖起来。由于分形内部有各种层次的空洞和缝隙，所以，有些小盒子是空的，有些小盒子覆盖了分形的一部分。数数多少小盒子不是空的，所得的非空(non-empty)盒子数记为 $N(r)$。然后缩小盒子的尺寸 r，所得 $N(r)$ 自然要增大。当 $r \to 0$ 时，得到数盒子法定义的分维：

$$D_0 = -\lim_{r \to 0} \frac{\lg N(r)}{\lg r} \tag{3.3}$$

在实际应用中只能取有限的 r。通常作法是求一系列的 r 和 $N(r)$，然后由双对数坐标中 $\lg N$-$\lg r$ 的直线的斜率求 D_0，这里要强调的是，式(3.3)必须要求存在标度关系

$$N(r) \sim r^{-D_0}$$

如果不存在这种标度关系，就根本不能使用分维的概念。这样求出的 D_0 叫做容量维。

数盒子方法式(3.3)的主要缺点是没有反映几何对象的不均匀性，含有一个点和许多点的盒子在式(3.3)中具有同样的权重。因此，我们将修改分维的定义，并相应修改数盒子方法。具体作法是把小盒子编号，如果第 i 个盒子落入 $N_i(r)$ 个点，我们就知道分形中的点落入第 i 个盒子的概率

$$P_i(r) = N_i(r)/N(r)$$

这里 $N(r)$是总的点数。然后利用信息量的公式 *

$$I(r)=-\sum_{i=1}^{N(r)}P_i(r)\log_2 P_i(r)$$

定义信息维

$$D_1=-\lim_{r\to 0}\frac{I(r)}{\log_2 r} \tag{3.4}$$

不难看出，当各个盒子具有同等权重，即 $P_i(r)=1/N(r)$时，信息量 $I(r)=\log_2 N(r)$，这时信息维 D_1 等于容量 D_0。

数盒子方法概念清楚，但实用有限，只有当分维小于二维或在二维附近时，计算才是可行的。当空间维数增高时，计算量迅速上升。目前实践中使用最多的是简便易算的关联维。

若在空间中某一集合由 N 个点组成，每个点的空间坐标是 $x_i=(i=1,2,\cdots,N)$。凡空间距离小于 r 的点对，称为有关联的点对。数一下有多少对关联点对，它在一切可能的 N^2 配对中所占的比例称为关联积分：

$$C(r)=\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}^{N}\theta(r-|x_i-y_i|)$$

关于信息量的说明：

随机实验有 N 种可能的结果(基本事件)，第 i 种事件发生的概率为 $P_i(i=1,2,\cdots,N)$，若一信息告诉我们第 i 种事件发生了，这个信息带来的信息量是

$$I_i=-\lg P_i$$

例如掷硬币国徽向上的概率 $P_{上}=0.5$，“掷硬币国徽向上”这个信息的信息量为(为方便计，取对数时以 2 为底，这里信息量单位记为 bit。若以其他数为底，则应用另外相应的单位)

$$I_{上}=-\log_2 0.5=1\ \text{bit}$$

显然，信息量与概率有关，概率越大，我们获得信息量就越小。

各种基本事件发生概率不同，因而携带的信息量亦不同，对这些信息量求算术平均值，就得到在这种统计结构下的平均信息量

$$I_{上}=-\sum_{i=1}^{N}P_i\log_2 P_i$$

这种平均信息量，是统计结构(信息源)不确定的量度。

无论是信息量还是统计结构都离不开概率。而概率描述的是一种可能性，一种不确定性。这说明信息和事物的不确定性之间存在着密切的联系。

式中台阶函数

$$\theta(r)=\begin{cases}1 & 当\ r>0\ 时\\ 0 & 当\ r\leqslant 时\end{cases}$$

当 r 太大时，任何两点都发生关联，$C(r)=1$，取对数后为 0。如果 r 取得合适，而原始数据客观地反映出

$$C(r)\sim r^{D}$$

的标度性质，那么可以定义关联维 D_2：

$$D_2=\lim_{r\to 0}\frac{\lg C(r)}{\lg r} \tag{3.5}$$

以后我们将说明，上面引入的容量维 D_0、信息维 D_1 和关联维 D_2 都是更普遍的广义分维 $D_q(q=-\infty,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ +\infty)$的特例。

下面举例说明数盒子方法的应用。图 3.7 是用数盒子方法求英国海岸线的分维 D，我们将包含整个英国的大正方形盒子的边长取作单位 1，然后分别用边长 1/24 和 1/32 的盒子去覆盖其海岸线，结果包含了海岸线的盒子数分别是 194 和 283，于是，海岸线的分维D 为

$$D=\frac{\lg 283-\lg 194}{\lg 32-\lg 24}\approx 1.31$$

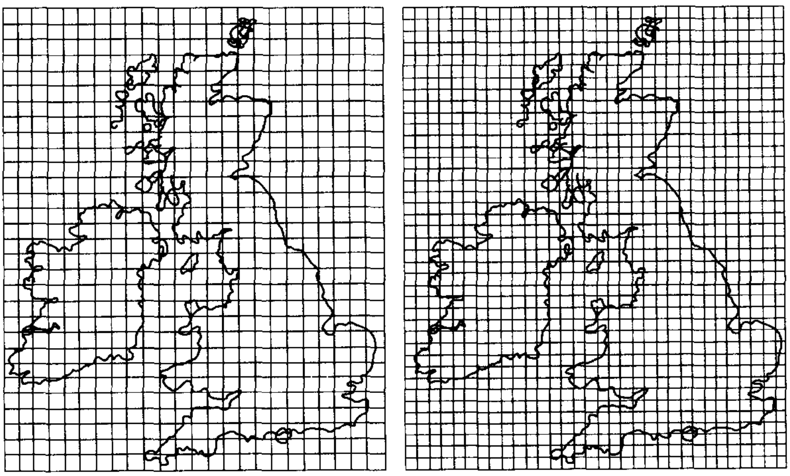


图 3.7　用数盒子法计算英国海岸线的分维

通过数包括英国领土的小盒子数目，计算小盒子数目随盒子大小的变化，可以求出分维

这个结果与前面用改变测量尺子长度的方法所得到的结果十分接近。

图 3.8 给出了几个不同的分形图形及其测量得到的分维。从图中可以看出，图形越平滑，越规则，其对应的分维就越小。而在日常生活中，人们判断一个图形是否平滑与规则都是凭直觉进行的，如图 3.8 中的 4 个图形，任何人都可以看出左上角图案比左下角的要平滑、要规则，而分维测量的结果也正好表明了这一点。直觉判断和分维测量两者符合得很好，这间接地表明，从人类的直觉来看，分形与分维是描述自然界许多现象物理性质的一种有效工具。

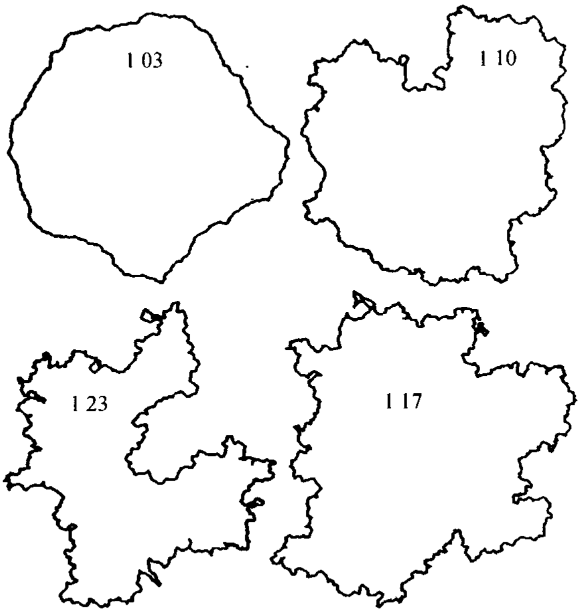


图 3.8　几种光滑及规则程度不同的几何图形及分维
人们的直觉观测的分维测量的结果是很相近的，越不光滑、越不规则的图形具有越大的分维

关于数盒子方法还有一点要谈及的，就是数盒子方法的实质是改变粗视化程度(successive coarsening)。对图形进行测量，通常是先从数大盒子开始，依次减小盒子的尺度，只计算那些“非空”盒子数。但有时，我们只能得到用很小的盒子进行测量的结果，如图 3.9 最左边一张图所示，如果我们有，而且只有这种测量结果，这会产生一个从

小盒子开始数盒子的问题。这个问题的解决需要一个粗视化的原则或判据，图 3.9 下方给出了这种粗视化的原则。这些原则与重整化群中的规则十分相似。从小盒子开始的数盒子方法，在定义分形的其它维数和理论研究方面是有用的(Russ，1994)。在图 3.9 中我们按照 2×2 的原则进行粗视化。特别值得注意的是，当粗视化过程中一个大盒子包含了两个白盒子和两个黑盒子时，对于这个大盒子究竟是白还是黑，决定的意义只能是概率性的，因此这种粗视化过程势必与统计分形有关，它涉及到 Kolmogorov 维数的产生。

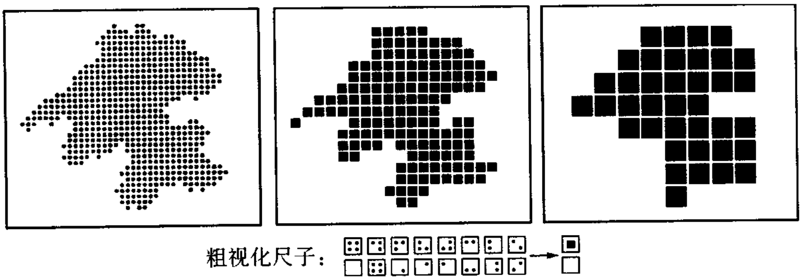


图 3.9　从小盒子资料开始，利用粗视化原则，统计非空大盒子的数目

计算分形图形分维的数盒子方法，又称为覆盖法，它既适用于简单分形，也适用于复杂分形。但对于一些特殊情况，如工程断裂表面，似乎无法进行直接覆盖(谢和平，1996)。因此，长期以来，人们不断寻求新的可行方法来对类似于断裂表面的复杂形体进行分形测量，于是多种基于不同分形原理的测量方法就应运而生，其中以“周长-面积关系”和“截面约定”为基础的方法应用最广，下面我们将分别进行介绍。

3.4　周长-面积关系

对于一个规则的图形，例如一个半径为 r 的圆，其面积 A 为

$$A=\pi r^2$$

其周长 P 为

$$P=2\pi r$$

于是

$$P=(4\pi A)^{1/2}$$

这样，对于传统的欧氏几何，图形的周长 P 与面积 A 之间的关系为

$$P \sim A^{1/2} \tag{3.6}$$

人们很早就认识到许多图形是不规则的。图 3.10 是 1516 年出版的一位无名氏的木刻，岛的面积和岛的周长都不能像圆那样简单地得到。经验总结表明，对于给定面积 A 的图形，它的周长 P 的最小值不能小于 $(4\pi A)^{1/2}$，即要求



图 3.10　1516 年一名无名氏的木刻

表现了岛屿面积与岛屿周长的复杂关系

$$\frac{P}{(4\pi A)^{1/2}} \geqslant 1$$

而周长 P 是没有上限的。这时 P 与 A 是什么关系呢？Hentschel 和 Procaccia(1984)证明，对于具有分形海岸线的岛屿，其面积 A 与周长 P 的关系为

$$P \sim A^{D/2} \tag{3.7}$$

式中 D 是海岸线的分维数，对比式(3.6)和式(3.7)，在相同面积条件下，英国的海岸线比圆形岛屿的周长要大许多，就在于海岸线的分维 $D \approx 1.36$。下面我们给出几个另外的例子。

Kent 和 Wong(1982)调查了加拿大 Ontario 地区的 21 个湖的面积与周长(图 3.11)，发现用分形图形的面积-周长关系去拟合实测资料，效果很好，且 $D = 1.50 \pm 0.18$。

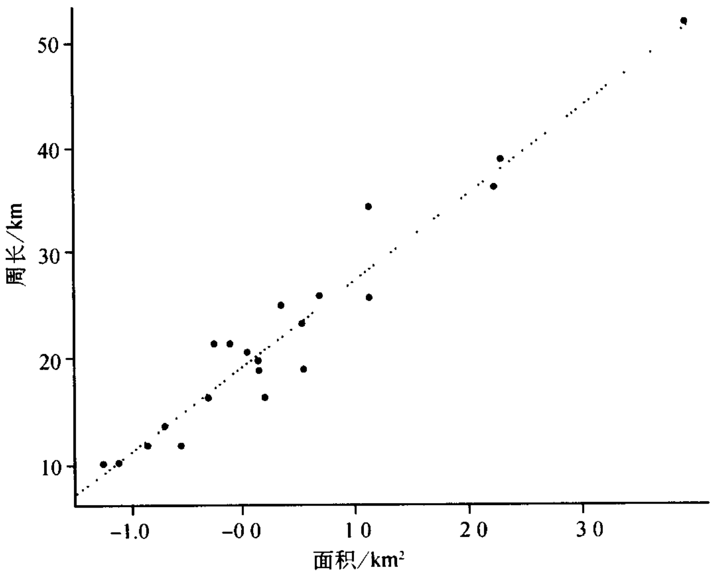


图 3.11　加拿大 Ontario 地区的 21 个湖的面积与周长关系(Kent 和 Wong，1982)

Lorejoy(1982)利用雷达和卫星资料测量了降雨云的面积和周长，雷达的分辨率为 1 km×1 km，而卫星测量的分辨率为4.8 km×4.8 km,所得结果如图 3.12 所示，与分形关系符合得也相当好。云

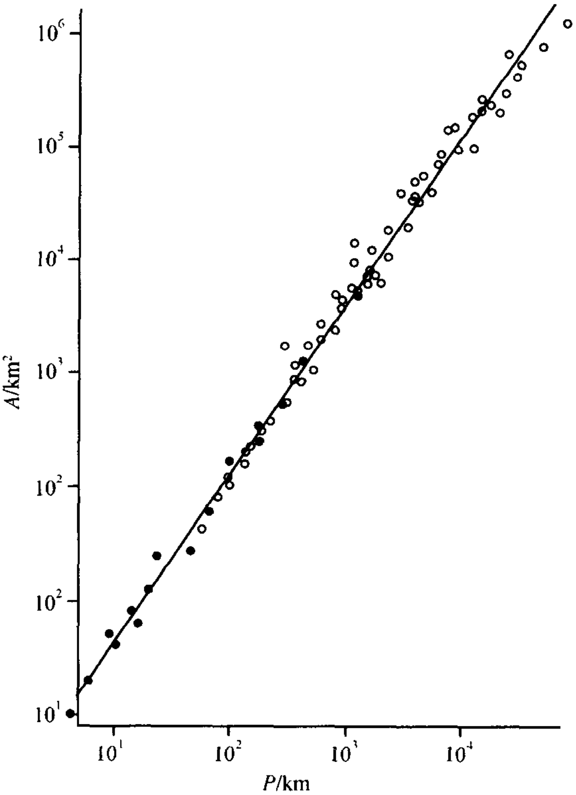


图 3.12　利用雷达和卫星资料得到的降雨云的面积和周长关系(Lorejoy，1982)

区的面积可以从 1 km² 变化至 1 000 000 km²(6 个数量级)，而云区的周长变化也可以超过 3 个数量级。图中的黑点给出的地面降雨区的面积和周长，这里降雨区的定义是指每小时降水量超过 0.2 mm 的地区。由图中的数据，可以算出对于降雨云而言，

$$D=\frac{4}{3}$$

Hack(1957)分析了美国许多河流的情况后发现，若用 P 表示河流的长度，A 表示河流的流域(图 3.13)，两者之间存在着经验统计关系

$$P \sim A^{D/2}$$

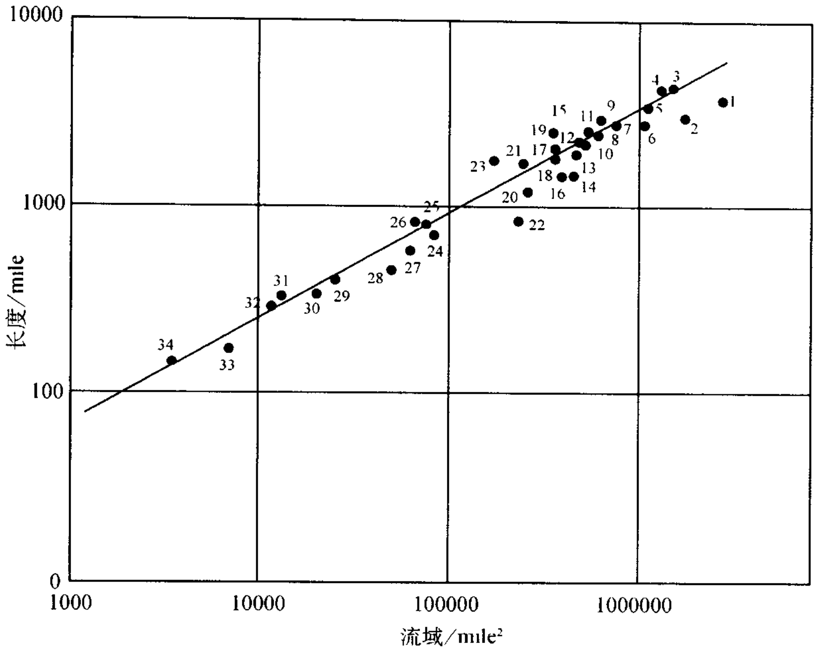


图 3.13　世界各主要河流的长度与流域面积的关系(Hack，1957)
图中数字代表河流名称如下：1. 亚马逊河；2. 刚果河；3. 尼罗河；4. 密西西比河；5. 奥伯河；6. 塞纳河；7. 阿穆尔河；8. Mackenjile 河；9. 长江(10 以下河流名称略去，1 mile=1609.344 m)

令人吃惊的是，研究发现这个关系式也适用于其他地区的河流。对于全球河流的平均值，$D=1.2$，这个关系在河流学中称之为 Hack 定律。

1984 年，Mandelbrot 等发明了一种新技术，用于材料科学中对材料断裂后形成的断面进行分析。他们的基本思想是：断裂面是分布在三维空间的一个立体面，对它进行几何分析有时比较困难。如果我们将该材料的断裂面磨平一部分，被磨平的部分相当于“岛屿”，没有被磨到的部分相当于“海洋”，这时测量得到的所有“岛屿”的面积之和与所有“岛屿”的周长之和，在图 3.14 上表示为一个实验点。接着再多磨去一点材料的断裂面，使更多一点的“岛屿”露出来，这样在图 3.14 上又可以得到另外一个点。多次磨平，就可

以得到一系列点，在双对数坐标中，这些点显示了一种线性的关系。按照前面介绍的求海岸线分维的类似方法，从图 3.14 中由直线斜率可以求出平面上断裂面的分维 D'，根据下节介绍的从二维和三维观察分形得到的分维数之间的关系，应用

$$D=D'+1$$

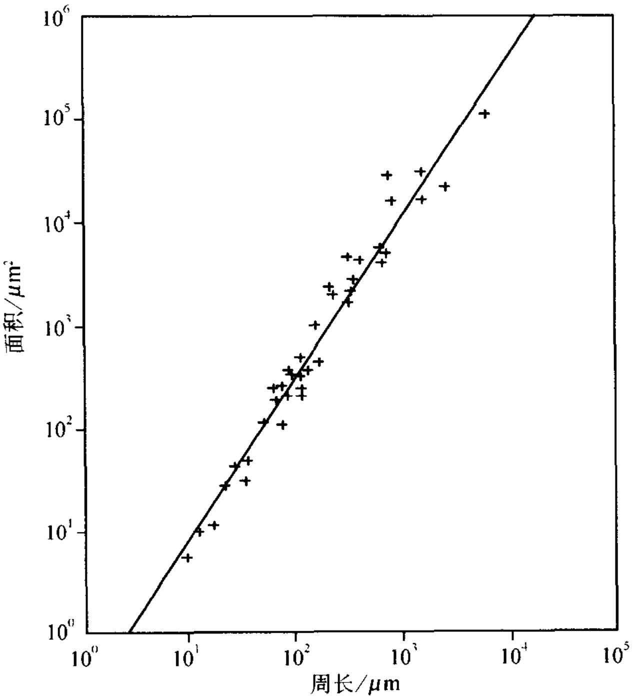


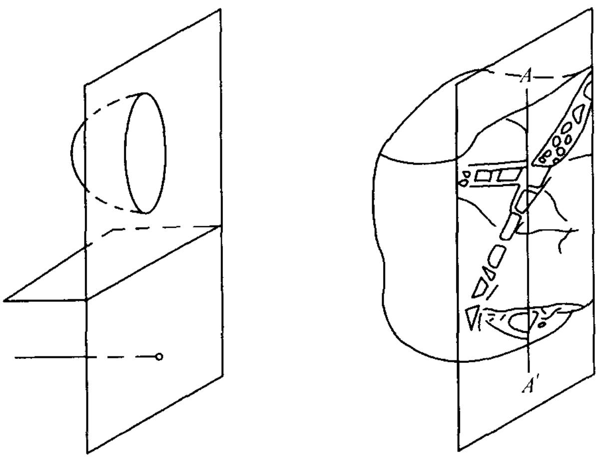
图 3.14 金属断面分形分析(Mandelbrot *et al*，1984)

这样，从断裂面与一平面交线的分维，可以了解断裂面的分形形态和其分维数。这种分析方法已在冶金和岩石等材料的研究中得到了广泛的应用(Stupak and Donovan，1988)，例如利用测量得到断面的分维，研究冶金的机理，寻找分维与材料各种性质的关系等。

3.5 截面约定(zero-sets)

在测量分维时，有一个约定(通常称为 zero-sets)是很有用的，

这个约定来源于欧氏几何学。用一个平面(所谓的截面)去和所研究的对象相交，仿佛用该截面把研究对象切开一样。在欧氏几何学中，三维物体在该截面上的交线是二维的，二维物体在该截面的交线是一维的，而一维物体与该截面相交成为了一个零维的点。概括来说，d 维物体在该截面上的交线为 $d-1$ 维。这种降维的截面，往往给物体内部的研究提供了方便(图 3.15(a))。



(a) (b)

图 3.15 分形物体与一平截面相交时分维的确定

(a) 传统的欧氏几何体与一平面相交，平面上的图形的维数要减小一维；三维的球变成二维的圆；二维的平面变成一维的线；一维的直线变成零维的点；(b) 统计分形体的分维是 D，在与其相交的平面上进行测量，分维为 $D-1$，在与其相交的 $A-A'$线上测量，分维是 $D-2$

现在将欧氏几何中的概念移植到分形几何中来：用一截面与分形体相交，它们与截面相交形成的图形要减少一维；它们与直线相交形成的点集要减少二维(图 3.15(b))，若以 D_{3-D}，D_{2-D}表示从空间、从截面、从截线上观测这个分形体的维数，则有

$$D_{3-D}=D_{2-D}+1=D_{1-D}+2$$

这就是通常所说的截面约定，它将从不同角度对分形进行测量的结果定量地联系起来了。

地质学家对断层系十分关心，断层系是展布在三维空间的一个

系统，但地质学家最常用的方法是在地表面断层系进行观测和测量(Okubo and Aki，1987；Sornette，1990)他们得到的是用地表面作为一个截面对三维断层系进行测量的结果，如果地表面上测得的断层系的分维是 D_{2-D} 的话，那么，断层系的真正分维 D 应为

$$D=D_{2-D}+1$$

最近，关于截面约定的话题被重新提出(Robertson and Sammis，

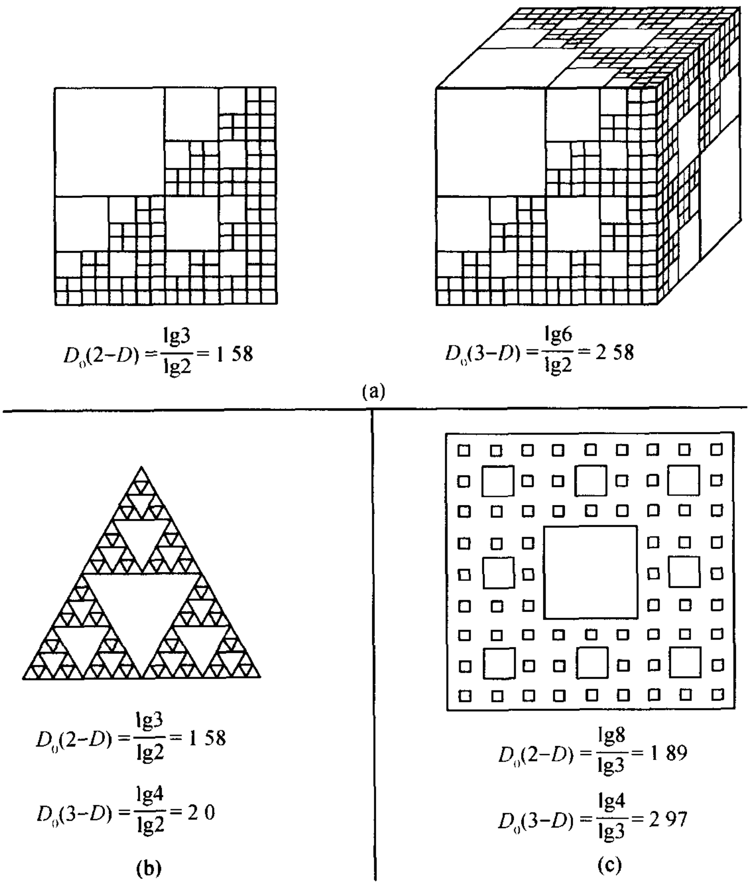


图 3.16 断层系统的理想化分形模型

(a) Sammis 等(1987)提出关于断层系统的一个理想化的分形模型，左方是二维模型，右方是三维模型，三维模型的分维可以通过二维模型的分维简单地加 1 而得到；(b) Sierpinski 分形模型，D_{3-D} 比 D_{2-D} 大 0.42；(c) 三维 Sierpinski 海绵，D_{3-D} 比 D_{2-D} 大 1.08

1995)，Robertson 等举出了一些数学分形的例子。第一个例子是 Sammis 1987 年提出的表示断层系的一个理想化的分形模型(图 3.16(a))。计算得到这个模型的 $D_{3-D}=2.58$，$D_{2-D}=1.58$，所以二维图形的分维正好比三维图形小了单位 1，但图 3.16(b))和图 3.16(c)给出的两个经典的分形，三维模型计算出来的 D_{3-D}和二维模型计算出来的 D_{2-D}之间就没有了截面约定中的关系，两个模型中 D_{3-D}与 D_{2-D}的相差值分别是 0.42 和 1.08，Robertson 分析了图 3.16 的情况后指出，截面约定成立的条件必须是：D_{2-D}是在各种不同方向上取截面时的平均结果。也就是说，截面的取法对结果有很大的影响。在图 3.16(a)中，二维截面与三维分形体表面平行，而图 3.16(b)和图 3.16(c)中的二维截面也都是具有特定方位的。从这个意义上来说，截面约定在规则的数学分形中只是近似地成立，而对于实际自然界中存在着大量统计分形来说，它本身已包含了统计平均的意义，只有在这种情况下，截面约定才能被广泛地应用于许多研究领域之中。

练　习　题

1. 15 世纪，Albert Durer 提出了图 3.17 所示迭代过程：将一个五边形分成 6 个小五边形和 5 个彼此相隔的三角形，三角形的长边与短边之比记为 g，显然

$$g=1/2\ \cos 72^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

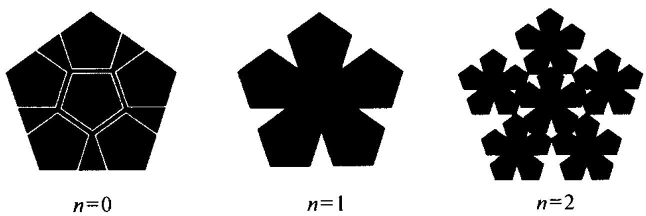


图 3.17　Durer 提出的一种生成分形的迭代过程

每次迭代过程五边形的边长缩小$(1+g)$倍，证明对于这种 Durer 图形(二维)，其分维为

$$D=\lg 6/\lg(1+g)$$

对于 Durer 图形的边界曲线，其分维为

$$D=\lg 4/\lg(1+g)$$

2. 用改变尺度的方法测量英国海岸线的长度，发现当测量尺度无限小时，其海岸线长度趋于∞。当我们用同样的方法去测量一个圆的周长时，当测量尺度无限变小时，圆的周长却趋近于一个有限数值。两者情况为什么不同(提示：对于规则的图形圆而言，其分维$D=1$，而海岸线的分维$D>1$)?

3. 找一幅中国地图(任意比例尺均可)，利用圆规或直尺，用数盒子方法测量中国海岸线(或其部分)的分维数。讨论其无标度区的范围(提示如下表)。

r/km	N	$\ln r$	$\ln N$
30	203	3.4	5.3
45	125	3.8	4.8
60	87	4.1	4.5
90	56	4.5	4.0
150	31	5.0	3.4
210	20	5.4	3.0
300	13	5.7	2.5
	$D\approx 1.20$		

第四章 统计分形

我们遇到的分形，大体上可以分成两类：一类是严格满足自相似条件的分形，如前几章介绍的 Cantor 集合，Koch 曲线等，分形的自相似性所要求的整体和其局部完全(从形状、数量等所有的角度来看都是)相似的条件得到严格的满足；另一类是自然界中遇到的大多数图形，如连绵起伏的山脉轮廓线，曲折蜿蜒的江河川流，频繁演变的海岸线，变幻无常的布朗微粒运动轨迹，以及材料断裂后展示的奇妙的断口图像等，它们的自相似性是近似的或者说是在统计意义上成立的。这第二类的分形，我们称之为统计分形。

4.1 数学分形和统计分形

自然界的许多事物和现象表现出极为复杂的形态，而不是数学分形所显示的那样理想化。自相似性或标度不变性往往以统计方式表示出来，即当改变尺度时，在该尺度包含的部分统计学的特征与整体是相似的。这种分形是数学分形的一种推广，叫做统计分形或无规分形。

下面通过一个例子来说明什么是统计分形。我们还是以 Koch 曲线为例。但是这里我们在原来生成 Koch 曲线的过程中加入随机成分。图 4.1 中给出了生成随机 Koch 曲线的原则：一条线段三等份后，保留两端的 1/3 不动，中间的 1/3 或者向上凸为等边三角形的两条边，或者向下凹为等边三角的两条边，我们假定向上凸或向下凹的机会是相等的。

图 4.2 给出了按照上述原则迭代 5 次后的随机 Koch 曲线，随意地取出该曲线的一部分与整个曲线相对比，在不同尺度图形中的折

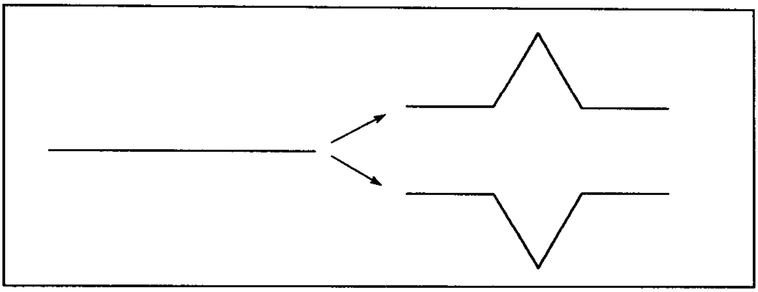


图 4.1　加入随机因素后，生成 Koch 曲线的原则为：
两种可能的结果出现的机会是相等的

线数目，折线角度以及其他统计特征是相似的，但当我们把随机 Koch 曲线与前面介绍的 Koch 曲线相比，形状则完全不同了。图 4.2 中曲线的生成是在简单的确定性原则中加进了随机的成分而得到的。值得指出的是：图 4.2 中第 1 级的随机 Koch 曲线有两种可能性，而第 2 级随机 Koch 曲线则有 $2^{4^0}\times 2^{4^1}$ 种可能性，依此类推，第 3 级曲线有 $2^{4^0}\times 2^{4^1}\times 2^{4^2}$ 个变种，第 n 级曲线则有 $2^{4^0}\times 2^{4^1}\times\cdots\times 2^{4^{n-1}}$ 个变种。请注意，对于第 5 级曲线，变种数为 2^{341} 种，我们称这样多的曲线的集合为随机 Koch 曲线，图 4.2 中画出的第 5 级随机 Koch 曲线，只是这 2^{341} 条曲线中的一种。因此可见，简单生成规律与随机成分的结合，可以产生巨大数目的多种多样的形态，而这么多的形态之中，包含着相同的统计规律，这是规律性和多样性(复杂性)的统一，也正是统计分形受到重视的原因。

数学分形是一种理想的情况，它必须具备两个条件：(1)数学分形曲线必须具有无穷的“层次(hierarchy)”结构，像 Koch 曲线(图 1.6)那样；数学分形集合必须是无限点的集合，像 Cantor 集合那样；只有无限层次结构，才能使得自相似性(标度不变性)处处成立；(2)数学分形的任何一个局部放大后，都和整体完全相似(形状、数量以及统计分布上都相似)。数学分形是分析自然界复杂事物的一个数学模型。要想具体应用到真实的自然现象，我们应该对数学分形做些推广和修正。概括来说，推广有两个方面：第一由无穷“层次”

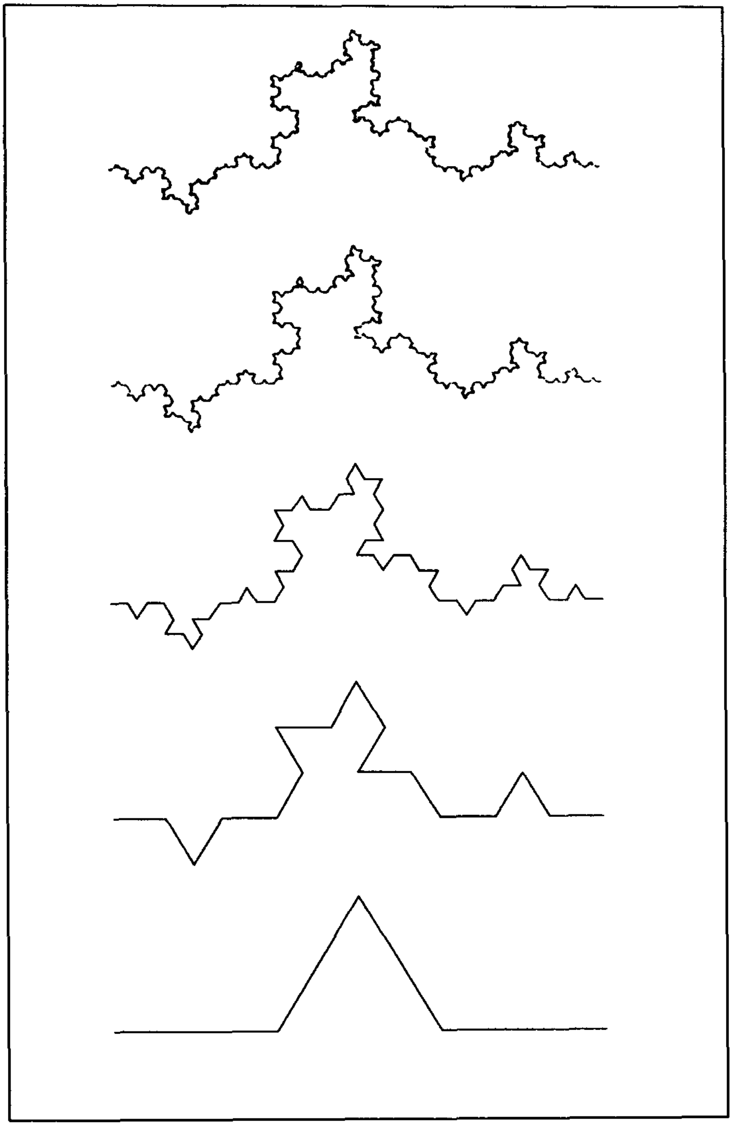


图 4.2　迭代 5 次后的随机 Koch 曲线

结构到有限的"层次"结构，或由无穷集合到有限集合的推广。这里就产生了在一定范围内自相似性或无标度性成立的问题，即无标度区间的问题；第二由严格的数学相似性到近似的统计相似性的推

广。在下面的两节中，我们分别对这两个方面的推广做些介绍。

图 4.2 所示的随机 Koch 曲线的例子，保留了曲线无穷层次的特点但对自相似的内容做了推广。它的一个部分放大后，其统计特征与整条曲线是相似的。研究这种统计分形，使用概率的语言来描述统计特征是十分合适的。

4.2 统计特征和超越率函数

概率论是研究随机现象数学规律的学科。所谓随机现象是指这样的客观现象，当人们观察它时，所得结果不能预先确定，而只是多种可能结果中的一种。在自然界和人类社会中，存在着大量的随机现象。例如，图 4.2 产生的分形就有许许多多形状。从原始图形出发，按照图 4.2 要求的规则，每一次产生图形的过程称之为一次随机试验，随机试验的每一种可能的结果称之为一个基本事件，一个或一组基本事件通称随机事件，或简称事件。事件发生的可能性量度则叫做其概率。

在进行分形几何研究时，我们把描述集合(或图形)中元素的随机变量(如元素的大小、位置、质量等)取作 ξ。随机变量 ξ 的统计特征可以由以下三种方法来描述：

1. 概率密度函数 $f(r)$

$f(r)\mathrm{d}r$ 表示随机变量 ξ 落入$(r,\ r+\mathrm{d}r)$区间中的概率 $p(r<\xi\leqslant r+\mathrm{d}r)$，即

$$p(r<\xi\leqslant r+\mathrm{d}r)=f(r)\mathrm{d}r$$

由概率的定义，显然要求

$$0\leqslant f(r)\leqslant 1$$

2. 分布函数 $F(r)$

$F(r)$是随机变量 $\xi\leqslant r$ 的概率，即

$$F(r)=p(\xi\leqslant r)=\int_{-\infty}^{r} f(r)\mathrm{d}r$$

显然：$f(r)=\mathrm{d}F(r)/\mathrm{d}r$。

因此，对所有的 r 若能知道 $F(r)$，那么我们就知道了 ξ 的概率密度函数 $f(r)$。换句话说，随机变量 ξ 的概率分布可由其分布函数 $F(r)$所确定。由 $F(r)$的定义，我们可以知道分布函数 $F(r)$具有下列性质：

(1) $F(r)$是 r 的增函数；

(2) $F(+\infty)=1$，$F(-\infty)=0$；

(3) $F(r)$处处右连续。

3. 超越率函数 $P(r)$

$P(r)$是随机变量 $\xi \geqslant r$ 的概率，即

$$P(r)=p(\xi \geqslant r)=1-F(r)=\int_{r}^{\infty} f(r)\mathrm{d}r$$

显然：$P(r)+F(r)=1$，$f(r)=-\mathrm{d}p(r)/\mathrm{d}r$。水文学中经常称这个函数 $P(r)$为保证率函数，它指随机变量大于某个数值的概率，例如某处水位高于 60 m 的概率等。在地震危险性分析中则称 $P(r)$为超越率函数；通过它给出某地区地震动参数大于某水平的超越概率。

利用上述几种描述，随机变量的一些统计特征就可求出。这里主要介绍数学期望和方差。数学期望是研究随机变量数字特征的最常用的特征量。数学期望的统计意义就是对随机变量进行长期观测或大量观测时所得数据的平均值，常用符号 $E(\xi)$表示随机变量 ξ 的数学期望：

$$\mathrm{E}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi)\mathrm{d}\xi=a$$

上式中常数 a 就是 ξ 的数学期望。在有限时间内对 ξ 的有限次观测，由上式计算得到的值是一个与实验或观测次数有关的变量，但实验或观测次数越多，它越接近 a 值。

为了衡量一个随机分布的分散程度，可以计算随机变量对其数学期望偏离的平均值，即 $\mathrm{E}(\xi-a)$，但是由于 $\xi-a$ 有正有负，相互抵消，不能真实地反映 ξ 的偏离程度，所以我们先取偏差$(\xi-a)$的平

方的平均数：E[(ξ－a)²]，然后再开方，这样就得到了随机变量ξ的方差D(ξ)和标准方差σ(ξ)：

$$D(\xi)=\sigma^2=E[(\xi-a)^2]$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{E[(\xi-a)^2]}$$

若考虑到数值较大的随机变量一般有较大标准方差的情况，我们可以用一个无量纲的参数

$$C_V=\frac{\sigma(\xi)}{E(\xi)}=\frac{\sigma}{a}$$

来衡量分布的相对分散程度，C_V 叫做分布的离差系数。

有了上述概率基本知识，我们再回到统计分形的讨论。$P(r)$是描述统计特征的基本参数，自相似性要求

$$P(br)\sim P(r)G(b) \tag{4.1}$$

式中b是一变换系数，是常数。$G(b)$是与r无关的，只与b有关的函数。

著名数学家 Cauchy 曾经专门研究过以下4类方程：

(a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

(b) $f(x+y)=f(x)f(y)$

(c) $f(xy)=f(x)+f(y)$

(d) $f(xy)=f(x)f(y)$

1821年，Cauchy 证明了满足上述方程的函数形式必然是

(a) $f(x)=cx$（c是常数，下同）

(b) $f(x)=e^{cx}$ 或 $f(x)=0$

(c) $f(x)=c\lg x$

(d) $f(x)=x^c$ 或 $f(x)=0$

（证明可参考 G. Korvin，1992）。显然，满足式(4.1)的只可能是幂函数，即

$$P(r)\sim r^{-D} \tag{4.2}$$

考虑到超越率函数 $P(r)\leqslant 1$，所以幂指数取负号。当r变换成br时

$$P(br)\sim r^{-D}b^{-D}$$

即在尺度变换时，分形集合的统计特征（用各种形式所表现出来的）是不变的。这种幂函数形式的超越率函数所表达的统计特征，在统

计分形中起着十分重要的作用。

式(4.2)在描述自然事件，特别是在描述地学事件的分布中，有着极为广泛的应用。在处理各种实际问题时，可以使用事件 ξ 出现的频度近似地替代超越率函数。若 $N(\geqslant r)$是线度大于或等于 r 的事件或集合的数目，则统计分形要求下面的公式成立：

$$N(\geqslant r)=\frac{C}{r^D} \tag{4.3}$$

式中，C 是个常数；D 是分形集合的分维。式(4.3)作为自然现象的一种统计描述，它的应用具有近似的意义，但使用中必须注意 r 取值的上限和下限问题。

4.3 无标度区

当我们研究由许多自然事件(或现象)组成的一个集合时，如果选择超越率函数作为描述这些事件统计分布的特征指标，研究表明，许许多多的自然现象都服从式(4.3)所示的统计分形关系。我们首先对每个事件给出表征该事件大小的特征量 r，例如研究火山时，我们规定每次火山喷发时喷出的火山灰总体积的立方根，就是衡量这次火山喷发事件大小的定量指标；又如研究活断层(或岩石样品中的裂纹)时，规定其长度 r 作为描述断层大小的一种度量等。然后统计在事件集中大于或等于 r 的事件数 $N(\geqslant r)$。表 4.1 给出了许多作者研究各种自然现象得到的结果。

表 4.1 统计分形的一些例子

例　子	r(事件大小)	N(大于或等于 r 的事件数)	D(分维)
日本活断层系的分形结构 (Hirata，1987，1989)	断层长度	断层数目	1.60
中国东南活动线性构造 (孔繁臣，1991)	线性构造长度	构造数目	1.85

续表

例　子	r(事件大小)	N(大于或等于 r 的事件数)	D(分维)
大理岩石的微破裂(Zhao *et al.*, 1993)	破裂长度	破裂数目	1.40～1.75
内华达基岩露头上的破裂(Barton *et al.*, 1989)	破裂长度	破裂数目	1.7
全球火山喷发统计(McClelland *et al.*, 1989)	喷出火山灰的等效半径	火山喷发的数目	2.14
天然断层泥中颗粒大小的分布(Scholz, 1991)	颗粒直径	颗粒数目	
圣安德烈斯断层(Okubo and Aki, 1987)	断层长度	断层数目	1.12～1.43
矿产储量和矿石品位(Turcotte, 1993)	矿石储量	矿产数目	1.16～2.01
地震频度和震级(Gutenberg *et al.*, 1954)	震级	地震频度	1.6～2.4

这里，我们举例来说明统计分形中存在着的特殊问题。所举的例子是岩石的破碎。破碎岩石是矿产开采作业中最基本的过程，尤其是对于破碎后岩石块度分布规律的研究，一直是评价破碎方法、研究破碎机理、决定开采方案以及选矿等至关重要的课题。岩石发生破碎后形成了许多大大小小的碎块，这些碎块的集合叫做碎形(Fragmentation)。碎形中关于碎块大小与频度的一种经验关系是Weibull 分布：

$$\frac{M(<r)}{M_0}=1-\exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma}\right]$$

式中，$M(<r)$是所有尺寸小于 r 的碎块和质量之和(可以通过筛选方

法很容易地求出）；M_0 是整个碎形集合的质量；r_0 是碎块的平均尺寸；γ 是个常数，可以由实验方法求出。

当 $r \ll r_0$ 时（注意，这是以下结论的前提条件），将指数函数进行 Taylor 级数展开，并略去二次项后，得

$$\frac{M(<r)}{M_0}=\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma} \tag{4.4}$$

式(4.3)与式(4.4)的联系，可以通过取增量的办法加以显示，取式(4.4)的微分

$$\mathrm{d}M(<r) \sim r^{\gamma-1}\mathrm{d}r$$

即

$$\mathrm{d}(M_0-M(\geqslant r))=-\mathrm{d}M(\geqslant r) \sim r^{\gamma-1}\mathrm{d}r$$

所以

$$\mathrm{d}M(\geqslant r) \sim -r^{\gamma-1}\mathrm{d}r$$

取式(4.3)的微分

$$\mathrm{d}N(\geqslant r) \sim r^{-D-1}\mathrm{d}r$$

而频度 N 增量与质量 M 增量又有以下关系

$$\mathrm{d}N \sim r^{-3}\mathrm{d}M$$

于是可得

$$D=3-\gamma$$

图 4.3 给出了关于碎形的一些实际测量结果。这些测量结果都与式(4.3)非常一致，而且无标度区（指分形关系成立的尺度范围）可达 2～4 个数量级，每个测量结果给出的分维值 $D=2.5$ 左右，且非常一致。这个例子表明，幂指数分布是自然现象在一定范围内很好的描述。这个例子还表明，不管岩石破裂是由于煤矿开采、地下核爆炸还是另外的原因，所得的碎形有着相近的结构，其统计结果都是一样的，反映了岩石内在的属性，揭示了分形背后更为深刻的物理规律。

反映统计分形的关系式(4.3)是在一定范围内存在的。以岩石的碎形为例，当我们研究采煤过程中煤块大小的分布时，一方面，由于煤层厚度等条件所限，讨论直径几米甚至几十米的大煤块是没有意义的，这决定了所研究的实际煤块大小分布的上限。另一方

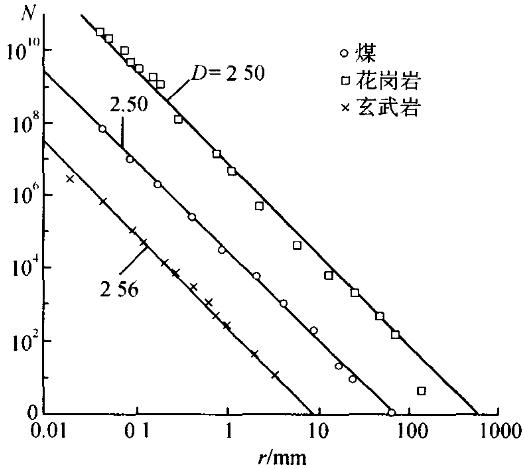


图 4.3　岩石碎形的一些实际测量结果

岩石破裂后形成各种大小的碎块，取每个碎块体积的立方根作为对其大小的一种客观度量。图中给出了采煤过程中的煤块(Bennetl, 1936)；6.1 万吨核爆炸形成的花岗岩碎块(Schoutens, 1979)和 2.6 km/s 的炮弹射在玄武岩石上产生的碎块(Fujiwara *et al.*, 1977)的分布。图中的数字是用最佳拟合方法得到的碎块分布的分维

面，采煤过程中研究那些半径小于 0.01 mm 的煤块也是没有意义的。因此，在实际问题中，统计分形关系(4.3)式只能在一定的尺度范围内成立，超过了这个范围，就失去了意义。该范围称为无标度区间。无标度区间是统计分形中的一个重要的限定，也是一个重要的概念。显然，用统计方法求统计分形参数时，无标度区间不能太小，否则不能保证有足够的统计样本，也不能得到可靠的统计结果。

本节的主要例子主要来自地学，下面给出另外两个例子，一个来自物理学，一个来自天文学。这两个统计分形的例子都在科学的发展进程中引起过争论。

例 1　粒子 Brown 运动的轨迹，其轨迹是由大量的折线组成，处处连续，处处不可微的曲线(在某一分辨率下为一段直线的轨迹，在更大分辨率下又由许多更小的折线组成)，试证明 Brown 轨迹 $D=2$。

证明：取某一时刻布朗粒子位置为原点，运动 N 步后，其坐标

为：$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i$。由于运动是极为随机的，$\langle\boldsymbol{R}\rangle=0$。$\langle|\boldsymbol{R}|^2\rangle$表示量度其运动轨迹的大小，$\langle\cdots\rangle$ 表示取统计平均：

$$\langle|\boldsymbol{R}|^2\rangle=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i+\sum_{i\neq j}^{N}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=Nr^2$$

r 为每步步长，上式中由于 $\boldsymbol{r}_i$ 是完全随机、完全独立的，所以 $\sum_{i\neq j}^{N}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=0$，这样

$$N(r)=\langle|\boldsymbol{R}|^2\rangle r^{-2}$$

其中$\langle|\boldsymbol{R}|^2\rangle$是一个确定量，按照式(4.3)，$D=2$，所以布朗粒子运动轨迹是一个分形，其分维为 2。

例 2 假定天上星星分布 $N(r)\sim r^D$(为简单计，不考虑星星大小、亮度等差异)考虑在 r 至 $r+\mathrm{d}r$ 之间的星星个数为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\cdot\mathrm{d}r\sim r^{D-1}\mathrm{d}r$$

地球上收到这部分星星的辐射能量为

$$\sim r^{D-1}/r^3\mathrm{d}r$$

所有星星对地球的总贡献为

$$\left|\int_{r_0}^{\infty}\frac{r^{D-1}}{r^3}\mathrm{d}r=r^{D-3}\right|_{r_0}^{\infty}$$

要保持夜里黑暗，必须 $D-3<0$

$$D<3$$

$$\text{实际 } D\approx 2$$

这就是轰动 20 世纪初的“天文学佯谬”，天上星星的分布是幂指数分布，分维为 $D=2$。

4.4 布朗(Brown)运动

布朗运动是研究随机现象统计规律的一个很好的模型。历史上因研究布朗运动，曾有 4 位科学家获得了诺贝尔奖。所谓布朗运动，是 1928 年 Brown 发现悬浮在液体中的细小粒子(如花粒)，

在不停地作着不规则的运动，人们把这种运动称之为布朗(Brown)运动。Brown指出，这种运动是分子碰撞的物理原因造成的，而非在他之前所认为的是生物学原因造成的。布朗运动是细小粒子在三维空间的运动，为了方便起见，这里只讨论一维的布朗运动，而一维布朗运动的许多特点要以很容易地推广到更高维的情况。

一维布朗运动可以由随机行走来产生。随机行走是这样得到的(图 4.4)：向西移动一步并抛一次硬币，如图徽向上则向左(南)跨一步(固定步长)，如国徽向下则向右(北)跨一步。不断向西移动并重复这个过程，我们就得到了一条曲线(细看起来是许多小台阶组成的折线)。其横轴代表向西的移动距离，也可以看成是代表了时间轴 t。而南北方向则相应于曲线的纵轴，代表了南北方向距离原点的长度 $B(t)$。这样，通过随机行走所得到的随机曲线 $B(t)$-t 就是一维布朗运动的数学表示，Feller抛 310 000 次硬币作了一次数学实验，其实验的结果见图 4.4，图 4.5 和表 4.2。

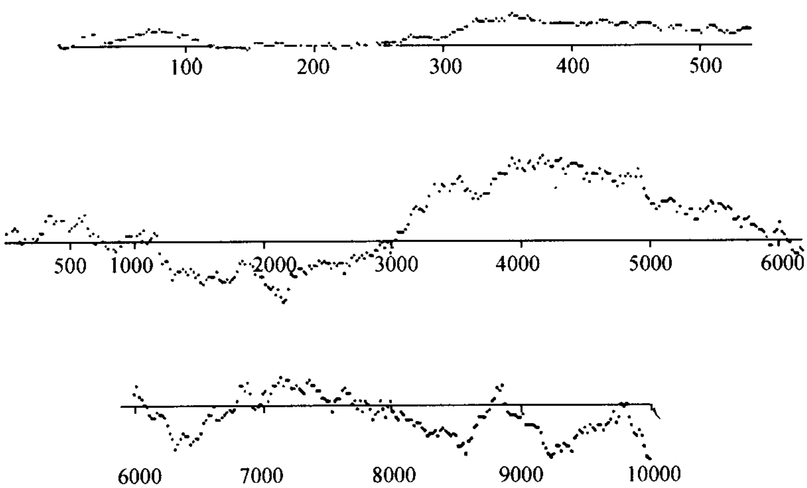


图 4.4　10 000 次抛硬币实验所得到的一维布朗运动曲线

(随机行走曲线，Feller，1951)

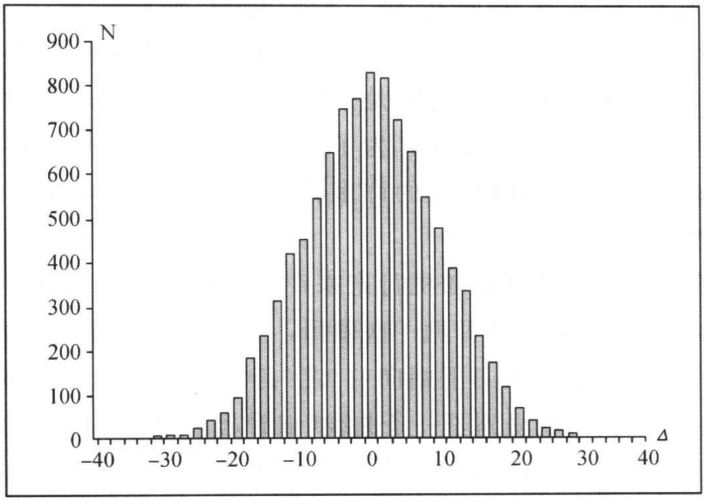


图 4.5　在图 4.4 中 10 000 个点距离原点的距离分布图

一维随机行走中距离分布与高期分布十分相近

表 4.2　10 000 次实验组成的随机行走中各时刻距原点距离的分布

Δ	N	Δ	N	Δ	N	Δ	N
0	828			26	21	−26	28
2	815	−2	767	28	17	−28	9
4	718	−4	746	30	6	−30	10
6	648	−6	648	32	1	−32	7
8	547	−8	547	34	2	−34	1
10	478	−10	453	36	0	−36	0
12	383	−12	421	38	0	−38	0
14	335	−14	315	40	2	−40	1
16	233	−16	234	42	1	−42	0
18	171	−18	185	44	0	−44	0
20	116	−20	94	46	0	−46	0
22	66	−22	60	48	0	−48	0
24	42	−24	44	50	0	−50	0

表中 Δ 表示距原点距离；N 表示距原点距离为 Δ 的点的数目。

我们关心的问题是：对于这样充满了随机行为的一维行走，能够对经过 n 步以后的位移进行预测吗？如果能够预测，依据是布朗运动的什么样的统计特征？显然，如果能够预测，那么就提供了一种从短时间的观测记录外推长时间统计行为的可能性。从直观上很容易想像，经过 n 步后布朗运动的位置的平均值应为零；布朗运动的运动位移平方和应为 n 个步长的平方。因为由于布朗运动粒子每经过一个离散时间单元，无论向左或向右跨一步，概率是相同的。因此，几步以后，平均而言，布朗运动的位置没有理由停在左边，也没有理由停在右边，所以平均值应为零。

现在从理论上研究由随机行走而得到的一维布朗运动 $B(t)$ 的统计特征，不失一般性，可以假定随机行走实验都是从坐标原点开始，即

$$B(t=0)=B(0)=0$$

若已知 t 时刻的位置 $B(t)$，则下一时刻 $t+\Delta t$ 的位置 $B(t+\Delta t)$ 由递推公式给出

$$B(t+\Delta t)=B(t)+\Delta B(t)$$

其中为方便计，每次在南北方向上的移动步长 $\Delta B(t)$ 可以定为单位长度：

$$\Delta B(t)=\begin{cases}+1 & \text{概率为 } 1/2\\ -1 & \text{概率为 } 1/2\end{cases}$$

$\Delta B(t)$ 取 $+1$ 还是 -1，完全是随机行为，与以前它的取值无关。于是从 $t=0$ 开始，对于每个点 $n\Delta t(n=0,\ 1,\ \cdots)$ 都可以得到一个 $B(t)$ 的值，由于每个点取值都有两种可能，所以行走 n 步以后，我们会得到 2^n 种随机行走曲线，它们构成了一个统计曲线簇，尽管该簇中每条随机行走曲线的形状都不同(图 4.4 只是抛 10 000 次硬币生成的 2^{10000} 条随机行走曲线中的一条)，但支配它们的统计规则却都是一样的，而且是极为简单的。计算随机行走的统计特征并不难，因为第 n 时刻曲线取值是几个独立的随机变 y_i 的取值之和，而这所有的几个独立随机变量 y_i 的取值只有 2 种可能：

$$\begin{cases}+1 & \text{概率为 } 1/2\\ -1 & \text{概率为 } 1/2\end{cases}$$

现在讨论一维布朗运动 $B(t)$ 的数学期望值，可以证明：对任何时刻 t，$B(t)$ 的数学期望 $\mathrm{E}(B(t))=0$。

【证明如下】(无兴趣的读者可以略过证明过程)：

根据定义，$\mathrm{E}(B(t=0))=\mathrm{E}(0)=0$，而且对所有时刻 t，$\mathrm{E}(\Delta B(t))=0$，假定对于时刻 $t=n\Delta t$，有 $\mathrm{E}(B(t))=0$。

利用递推方法

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(B(t+\Delta t)) &= \mathrm{E}(B(t)+\Delta B(t)) \\ &= \mathrm{E}(B(t))+\mathrm{E}(\Delta B(t)) \\ &= 0\end{aligned}$$

这样，证明了对于时刻 $t=(n+1)\Delta t$ 来说，$\mathrm{E}(B(t))=0$。

现在进而讨论 $B(t)$ 的方差 $D(B(t))$，由于 $D(B(t))=\mathrm{E}[B(t)-\mathrm{E}(B(t))]^2=\mathrm{E}([B(t)]^2)$，同样根据定义，$\mathrm{E}([B(t=0)]^2)=\mathrm{E}(0)=0$，对于任何时刻 t，$\mathrm{E}([B(t)]^2)=1$。所以，如果假定对于 $t=n\Delta t$ 时刻，$\mathrm{E}([B(t)]^2)=n$，现在用递推方法研究 $t=(n+1)\Delta t$ 时刻的情况。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}([B(t+\Delta t)]^2) &= \mathrm{E}([B(t)+\Delta B(t)]^2) \\ &= \mathrm{E}([B(t)]^2)+2\mathrm{E}[B(t)]\mathrm{E}[\Delta B(t)]+ \\ &\quad\ \mathrm{E}([\Delta B(t)]^2) \\ &= \mathrm{E}([B(t)]^2)+1 \\ &= n+1\end{aligned}$$

由上面证明，可以知道，当研究时间段[0，T]上的布朗运动 $B(t)$ 时，它的统计特征如下：

$\mathrm{E}(B(t))=0$	$B(t)$ 的数学期望值为 0
$D(B(t))\sim T/\Delta t\sim T$	$B(t)$ 的方差与 T 成正比
$\sigma(B(t))\sim T^{1/2}$	$B(t)$ 的均方差与 $T^{1/2}$ 成正比

以上的统计特征对于统计分形来说，非常重要。有两点特别值得指出。

(1) 如果我们取方差 $D(B(t))$ 来描述布朗运动的统计特征的话，将一小段布朗曲线放大 b(b 为一常数)倍，得到了 bT 时间中的一大段布朗曲线，后者的方差是前者的 b 倍。由此，我们可以知道，当尺度变换时，从统计特征角度，布朗曲线是分形的，而且分维为 1.

用数学语言来说，如果 $f(t)=D(B(t))$，则有

$$f(bt)=D(B(bt))\sim bf(t)$$

(2) 如果取 t_1 作为时间原点，研究从 t_1 至 t_2 时间间隔内的布朗运动；再取 t_3 作为时间原点，研究从 t_3 至 t_4 时间间隔内的布朗运动，只要 $t_2-t_1=t_4-t_3=T$，则有

$$D[B(t_2)-B(t_1)]=D[B(t_4)-B(t_3)]\sim T$$

这表明，布朗运动的统计特征只与时间尺度长度有关，而与时间起点无关。为了说明了这一点，图 4.6 给出了三张布朗运动的实测结果。在判断随机变量变化范围时，我们经常使用均方差

$$\sigma(B(t))\sim T^{1/2}$$

在图 4.6(a)中，记录了 0～1000 s 内的布朗运动，图中的纵坐标是±30；图 4.6(b)中，记录了 0～16 000 s 内的布朗运动，纵坐标是±120。请注意，与图 4.6(a)相比，图 4.6(b)的横坐标缩小了 16 倍，

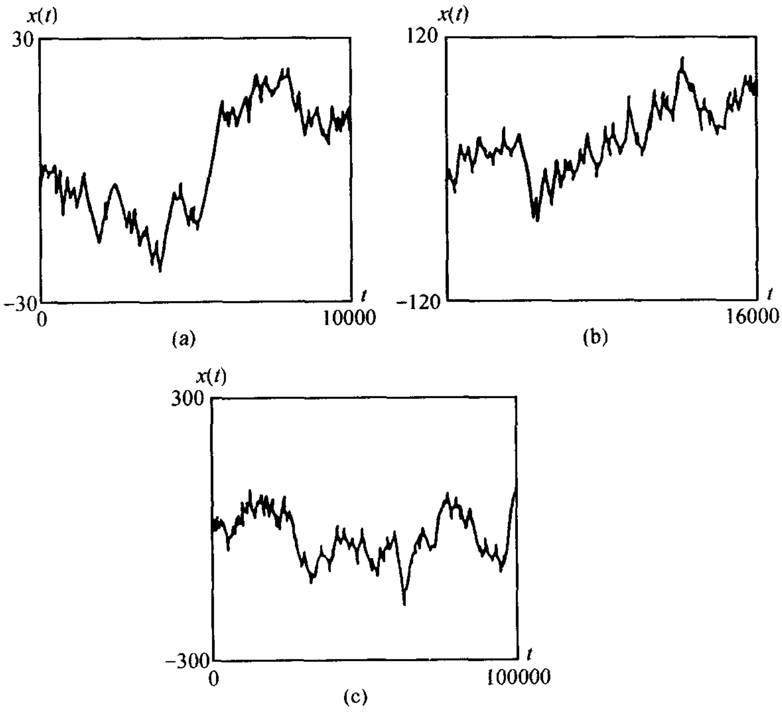


图 4.6　一维布朗运动的统计特征

而纵坐标则缩小了 $16^{1/2}=4$ 倍；图 4.6(c) 给出了 100 000 s 内的布朗运动曲线，横坐标比图 4.6(a)缩小了 100 倍，而纵坐标缩小了 $100^{1/2}=10$倍。从三张实验记录的对比，不难看出，若横坐标缩小 b 倍，纵坐标则相应地缩小 $b^{1/2}$倍，以上三张图均满足 $\sigma(B(t))\sim T^{1/2}$ 的关系，在统计上是自相似的。

图 4.7～4.9 给出了实验方法产生的布朗运动的实际曲线(最上方的图)。然后在时间轴方面依次扩大 2 倍、4 倍和 8 倍，就得到了各图第 2、第 3 和第 4 条曲线，但纵坐标方面的变换系数在三张图中很不相同。图 4.7 中依次扩大了 $2^{1/2}$，$(2^{1/2})^2$ 和$(2^{1/2})^3$ 倍；图 4.8 中依次扩大了 $2^{0.2}$，$(2^{0.2})^2$ 和$(2^{0.2})^3$ 倍；图 4.9 中依次扩大了 $2^{0.8}$，$(2^{0.8})^2$ 和$(2^{0.8})^3$ 倍，由图中的阴影部分可以看到，在改变坐标的标度后，阴影区域的形状是十分相似的，这些实验结果再一次显示了 $\sigma(B(t))\sim T^H$ 的特点，表明了统计上的自相似性。

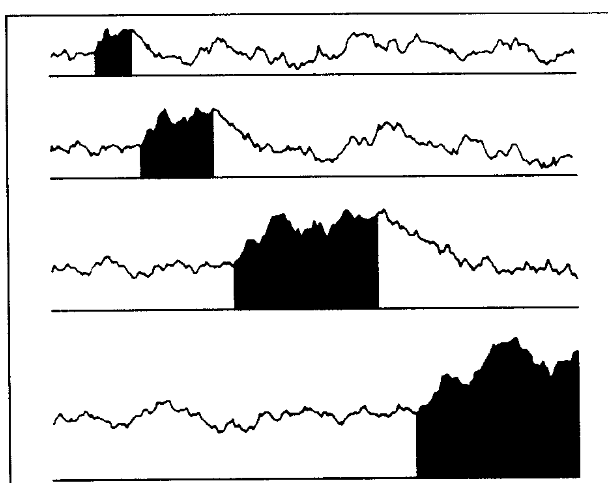


图 4.7　随机行走的实验结果

将实验结果的曲线(最上方)横坐标放大 2 倍，纵坐标放大 $2^{1/2}$倍，就得到第 2 条曲线，依次进行标度变换，可以得到图中第 3、第 4 条曲线。在标度变换下这些曲线的相似性表明了布朗运动遵守幂律。图中画阴影的部分强调在标度变换下各条曲线形状的相似性

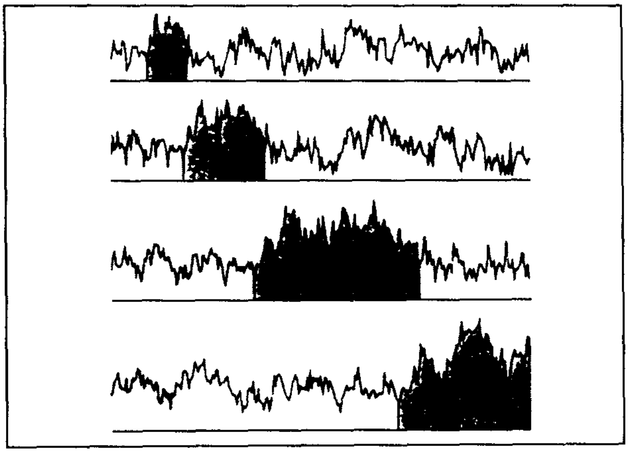


图 4.8　随机行走的变种

分数布朗运动的实验结果参见“自仿射分形”一章。图中表示方法均与图 4.7 相同，但纵坐标的变换系数不再是 $1:2^{1.2}$，而改为 $1:2^{0.2}$

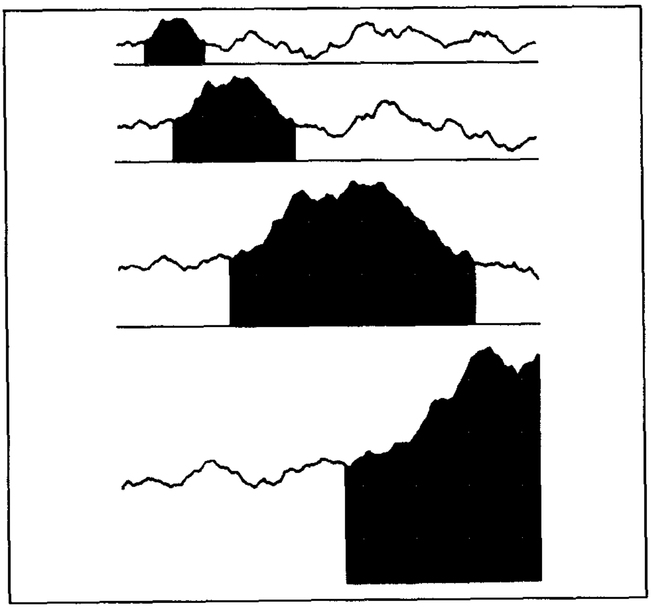


图 4.9　分数布朗运动的实验结果，标度变换为 $1:2^{0.8}$

关于这一点，我们在以后的自仿射分形和 R/S 分析两章上，还会多次提及。

一维布朗运动曲线是个随机分形的典型例子，它经常用于作为解释一些自然现象的数学模型。

Frechet(1941)发现，若用 x 表示一个湖泊的面积，而 N 表示面积大于 x 的湖泊的个数，他发现在湖泊的面积与湖泊的数目之间存在着统计关系式：

$$\lg N=2-0.5\lg x \tag{4.5}$$

这又是我们熟知的幂指数关系：$N\sim x^{1/2}$。为什么自然界会普遍存在这种关系呢？这种关系后面的生成模型又是什么呢？

Mandelbrot(1995)认为目前地球表面地貌，是经历了许许多多地质过程的综合作用，经历了几千万、几亿年的长期演变而形成的。我们可以想像地球的一个垂直剖面的地貌形状如一条一维的布朗曲线，在布朗曲线上取正值的部分是陆地，取负值的部分是海洋和湖泊。为此我们可以把图 4.4 看作地球的一个垂直剖面。图 4.4 中 120～150 的地方是沼泽地；1 000～6 000 是海岸外边大的岛屿，7 000～8 000之间的地方是群岛，而8 900～9 000附近是一座孤立的海岛。这样一来，布朗运动曲线就成为地球表面的地貌曲线了。现在我们利用一维布朗运动曲线作为湖泊生成的随机模型，来说明为什么 Frechet 能够发现湖泊面积与湖泊数目之间存在着经验关系式。

考虑一个二维的模型，取湖边作随机行走的起点，距离湖边的距离用 x 表示，而用 Z 表示湖的深度。和随机行走一样，假定每远离湖边一个单位，湖水深度的变化 $Z(x+1)-Z(x)$将为$+C$ 或$-C$，而且两者出现的概率都是 1/2，显然，$Z(x+1)-Z(x)$是一个正态随机变量，它的数学期望为 0，方差正比于 $\mathrm{d}x$，湖的面积是由两个点所确定的，第 1 个点就是湖边，因为 $Z(0)=0$，第 2 个点$\tilde{x}$使得深度 $Z(\tilde{X})$再次等于零。在二维模型中，这个$\tilde{x}$值就代表了湖的面积(三维的模型也可以类似地建构，见 Mandelbrot，1995)从一维布朗运动曲线可以知道，

$$N(\tilde{x}>x)\sim Cx^{-1/2} \tag{4.6}$$

其中 C 是个常数，它在不同模型——例如山区模型或平原上湖泊的模型中可以取不同的值，以上由布朗运动这样一个完全随机的模型导出的湖泊数目和湖泊面积的公式(4.6)与实际观测得到的经验公式(4.5)是完全一样的。

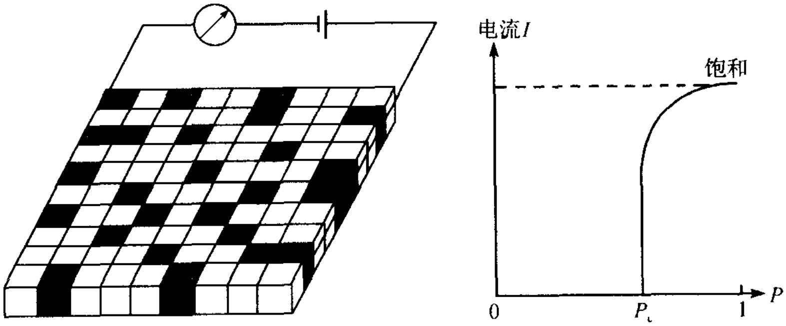
上面的例子，表明在分析分形时，利用一些数学模型去研究分形关系产生的原因，是十分重要而且有效的。

4.5 逾渗模型

从上面介绍的例子可以看出，统计分形具有层次结构，在不同标度层次上，统计特征是自相似或相同的。现在要问，产生统计分形的物理原因是什么呢？我们结合一随机结构中发生的突变现象，初步地讨论这个问题。逾渗(percolation)模型是处理随机几何结构或介质的一种模型，所以从逾渗模型谈起。

1. 逾渗模型

图 4.10 是一层平面堆集的同等大小的立方块。黑色为导电块，白色为绝缘块。黑白分布是随机的。现在的问题是研究这种随机介



(a) (b)

图 4.10 研究一层平面堆集立方块导电行为的实验

(a) 立方堆集体，黑色为导电立方块，白色为绝缘体。黑白块的分布是完全随机的。左右两端以电极相连。电表指示通过这种立方块集合体的电流。(b) 实验结果示意图。当导电立方块的比例达到 P_c 值时，通过这种随机立方块集合体的电流突然急剧上升。在 P_c 之前，通过的电流为零

质的导电行为。

我们用 P 表示导电块数目占总立方块数目的比例，即 P 表示一立方块是导电的概率。从图 4.10(b)的实验结果可以看出，在 $P<P_c$ 之前，通过立方块集合体的电流为零(不是很小，而是为零)，$P\to P_c$ 时，电流从零急剧增加到饱和电流(受导电块电阻所限制)。这是一种突变现象，它难于用经典物理学来解释。

数学家 J. M. Hammersley 提出用逾渗一词来描述这类统计几何模型的突变问题(Hammersley，1983)。其后，逾渗模型得到广泛的应用，这种情况可以从表 4.3 列举的一些例子看得很清楚。

表 4.3　逾渗模型的应用

现象或体系	转　变
岩石多孔介质中流体的流动	不流动/流动
复合材料	绝缘/导电
群体中疾病的传播	抑制/流行
通讯、电力网络	不通/联结
岩石的破坏	完整/破坏

如何解释逾渗模型所显示的突变现象呢？人们找到了重整化群方法。

2. 重整化群方法

重整化群(renormalization group)方法是 Willson 1971 年提出的，它是通过改变物体的粗视化程度来研究观测物理量变化规律的方法(Willson，1974)。1982 年 Willson 因此获得了诺贝尔奖。现将重整化群方法用于解释图 4.10 中的逾渗模型。

首先取 4 个立方块组成的方阵，作为新的 1 级方块(粗视化)，由每个立方块导电概率 P 可以计算出 1 级方块的导电概率 P_1(图 4.11)。

$$P_1=2P^2-P^4$$

再取 4 个 1 级方块组成的方阵，作为 2 级方块。不断粗视化的结果，即使问题被重整化了。完全仿照图 4.11 所示的方法，可以求出第 n 级方块导电概率 P_n 与第 $n+1$ 级方块导电概率 P_{n+1} 之间的关系

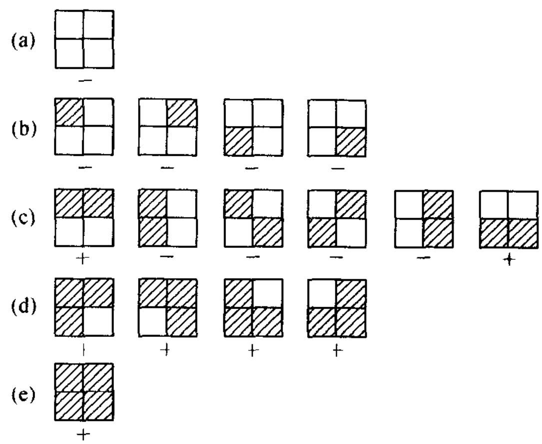


图 4.11　4 个立方块组成的 1 级方块

如果从左至右存在着导电通道，则称该 1 级方块是导电的。图中从左至右可以导电的情况用＋号注明，不可导电的情况用－号注明。(a)中，4 个立方块均不导电；(b)中，1 个立方块导电，并有 4 种情况；(c)中，2 个立方块导电，共有 6 种情况，相应的 1 级方块导电的概率是 $2p^2(1-p)^2$；(d)中，3 个立方块导电，共有 4 种情况，相应的 1 级立方块导电的概率是 $4p^3(1-p)$；(e)中，所有 4 个立方块均导电，共有 1 种情况，相应的 1 级立方块导电的概率是 p^4。将以上各种可能的情况综合在一起，1 级立方块导电的概率为 $p_1=2p^2(1-p)^2+4p^3(1-p)+p^4=2p^2-p^4$

$$P_{n+1}=2P_n^2-P_n^4$$

图 4.12 给出了 $n+1$ 级方块与 n 级方块导电概率之间的关系曲线。从图 4.12 可以看出，当初始立方块导电概率 $P<P_c$（P_c 是曲线 $P_{n+1}=2P_n^2-P_n^4$ 与直线 $P_{n+1}=P_n$ 的交点）时，$P_\infty=0$。这说明了立方块集合体是不导电的，这时电流为零（只要图 4.10 中立方体数目足够多）。当 $P>P_c$ 时，$P_\infty=1$，表示立方块集合处于饱和导电状态。当 $P=P_c$ 时，出现了由不导电向导电转变的突变现象。特别值得指出的是，此时，$P=P_1=P_2=\cdots=P_c$，即所有标度上的各级方块都有相同的导电概率。具有与标度无关的导概率是突变临界点非常重要的特点。

以上用最简单的重整化群解释了逾渗现象的突变现象。

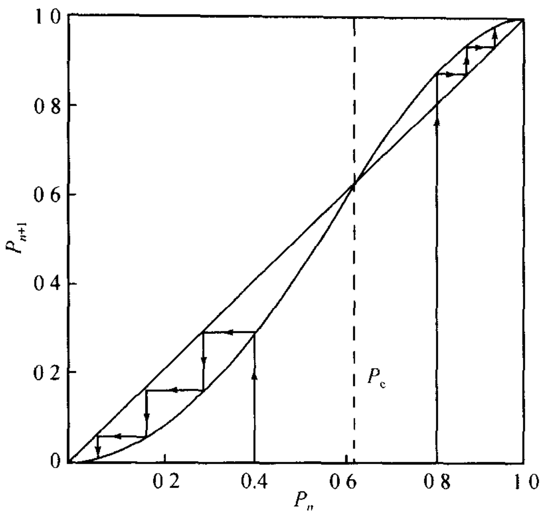


图 4.12　第 $n+1$ 级方块导电概率 P_{n+1} 与第 n 级方块导电概率 P_n 的关系
导电开始的临界概率是 $P_c=0.618$。当初始的立方块导电概率 $P=0.4$ 时，迭代结果趋于不导电点 $P_\infty=0$。而当原始立方块导电概率 $P=0.8$ 时，迭代结果趋于导电(饱和点)$P_\infty=1$

3. 统计分形产生的物理原因

如果我们取各种标度下的导电概率作为描述统计特性的参量，则在 $P=P_c$ 条件下，导电概率 P_n 的标度不变性，表征了临界(突变)现象的存在是产生统计分形的物理原因。

分形是与描述自然界多种临界现象有关的，在研究自组织临界现象(SOC——Self-Organized Criticality)中起着越来越大的作用。分形几何学已经成为非线性动力学研究的一部分。当然，分形数学和分形物理的研究都刚开始不久，两者的结合还有许许多多的问题有待深入。

练　习　题

1. 有人说，分形在纸上是画不出来的。数学分形有无限的层次，

是一无限的集合，而我们所画出来的只是有限层次和有限集合的结果，是一种近似；而统计分形是由无数(或数目很大)的分形变种组成的一个随机图形的集合，而我们能画出来的仅是其中的一种图形，或者说是一次采样的结果。这种说法对不对?

2. “当破碎岩石时，分维大的试样，碎块多，体积小，破碎程度高；分维小的试样，碎块少，体积大，破碎程度较低，因此，块度分布的分维能够定量地反映岩石破碎的程度(引自高峰、谢和平的论文：岩石块度分布的分形性质及微观结构效应，岩石力学与工程学报，第13卷，第3期，240～246页，1994)。请对应本章图4.3，讨论以上这段话对不对，为什么?

3. 图4.13是中国大陆70年中发生的震级大于或等于M的地震数目$N(M)$与地震震级M的关系：$\lg N=a-bM$。其中a，b为常数：$a=6.9$，$b=0.8$。根据该图(或上述公式)，估计每年(平均)7级、6级和0级的地震数目。又若某地发生5级地震的平均重复周期是10年，问7级地震重复周期为多少年?

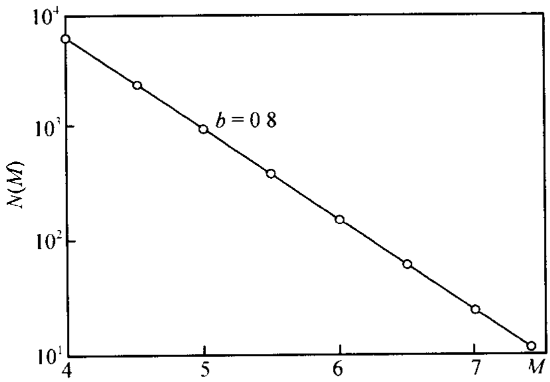


图4.13　中国大陆70年以来发生的震级大于或等于M的地震数目$N(M)$与地震震级M的关系曲线

曲线表达式为$\lg N=a-bM$，其中a，b为常数：$a=6.9$，$b=0.8$

4. 由均质材料组成的立方块，等分27块，去掉中心的1块而保留其余。(a)写出第n次迭代时，边长$1/r^{3n}$小立方块的数目；(b)计算该分形的D；(c)写出第n次迭代后分形体的平均密度表达式(提

示：$\rho \approx (26/27)^n \rho_0$)

5. 在一集合中，若已知线度为 r 的物体数目 N 是

$$N(=r) \sim r^{-D}$$

证明：该集合为分形集合，且

$$N(\geqslant r) \sim 1/r^D$$

(提示，先求出概率密度来，$dN(r)$为$(r, r+dr)$区间的次数，显然 $f(r)=dN/dr$)

6. 下面是几种数理统计中常见的分布函数

$$1-F(r)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+r^2} \qquad \text{(Cauchy 分布)}$$

$$1-F(r)=\exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^v\right] \qquad \text{(Weibull 分布)}$$

$$1-F(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{r} e^{t^2/2} dt \qquad \text{(正态分布)}$$

$$1-F(r)=1-\sum_{i=0}^{r}\frac{(\lambda l)^i}{i!}e^{-\mu} \qquad \text{(Poison 分布)}$$

画出这 n 种分布的 $F(r)-r$ 图，并讨论在某一区间范围内用 r^{-D} 去逼近上面几种分布曲线的可能性。

第五章　自仿射分形

前面几章研究的对象，都具有“部分以某种形式与整体相似”的性质，它们都是自相似分形。本章中，我们研究另一种分形，即自仿射(self-affine)分形，首先说明什么是自仿射分形。

图 5.1(a)给出了相似变换的示意图。平面 A 上的图形经投影，变换到与 A 平面平行的平面 A'上，得到的是一个均匀放大(或缩小)的图形。在图 5.1(a)中所示的 x_1 和 x_2 方向上，变换的标度因子是一样的。这种各向同性的变换叫做相似变换。如果 A'上的图形是具有自相似性的，即取其一部分(OB)放大或缩小 b 倍后，与整体(OBC)具有完全同样的性质

$$f(br)=bf(r)$$

我们称 A'平面的图形或集合是自相似的。换句话说，图形的一部分经过相似变换后和整体相似的几何对象叫做自相似分形。

图 5.1(b)给出仿射变换的示意图。与图 5.1(a)不同的是，平面 A 不再与平面 A'平行，因而 A'平面上得到的图形在 x_1 和 x_2 方向上

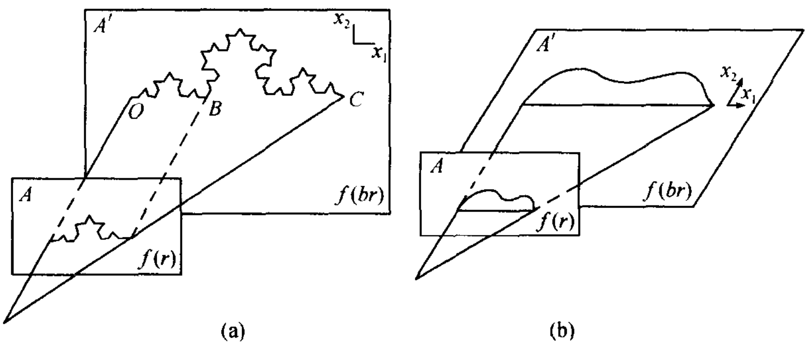


图 5.1　相似变换和自仿射变换对比图

(a)相似变换；(b)自仿射变换

的放大(或缩小)的倍数是不同的。这种在不同方向(如 x_1 和 x_2)上具有不同标度因子的变换称为仿射变换。图形的任一部分(OB)，经过仿射变换后与 A' 上整体图形相同(完全相似)，这种图形叫做自仿射分形。如图 5.1(b)所示，平面 A' 上图形的一部分若在 x_1 方向放大(或缩小)b 倍，而在 x_2 方向上扩大(或缩小)b^H 倍(H 是个常数，称之为 Hurst 指数，$0\leqslant H\leqslant 1$)，经过这样的仿射变换后的图形若和 A' 上图形完全相似，则称之自仿射分形。或者说

$$f(br)=b^H f(r) \tag{5.1}$$

显然，$H=1$ 时自仿射分形就变成了自相似分形。

自仿射分形在地学问题中有着广泛的应用：现在有一种用硬塑胶片制成的立体地图，山脉、盆地、河谷等地貌在这种立体地图上清晰可见。这种立体地图实际上是某一地区地形表面的仿射变换，立体地图在水平方向(经、纬度方向)和垂直方向(地形的高程)的比例尺是不同的。举例来说，水平方向的比例是 1∶30 万而高程方向的比例尺只是 1∶3 万。下面我们将会看到，多数地形是自仿射分形的。自仿射在地学问题中应用的另一方面，是当我们记录地球物理场随时间变化时，所得到的时间序列(或时程曲线)可以用自仿射分形分析的方法进行处理。自仿射分形分析是处理声阻抗-岩芯深度，地面高程-经度等多种函数关系的有力工具。

5.1 自仿射数学分形

我们先讨论严格的自仿射分形，即数学分形。所用的例子是魔鬼台阶(图 5.2)。

魔鬼台阶(devil staircase) 图形的生成与前面讲过的 Cantor 集合有密切的关系。假定把在区间[0，1]中均匀的密度为 1(总质量亦为 1)的物质收缩集中在[0，1/3]和[2/3，1]的两个区间内。若假定物质总质量不变，那么密度在[0，1/3]和[2/3，1]的两个区间内为 3/2，而在区间[1/3，2/3]内为 0。若此物质进一步收缩，并假定它都集中在[0，1/9]，[2/9，3/9]，[6/9，7/9]，[8/9，1]，那么这

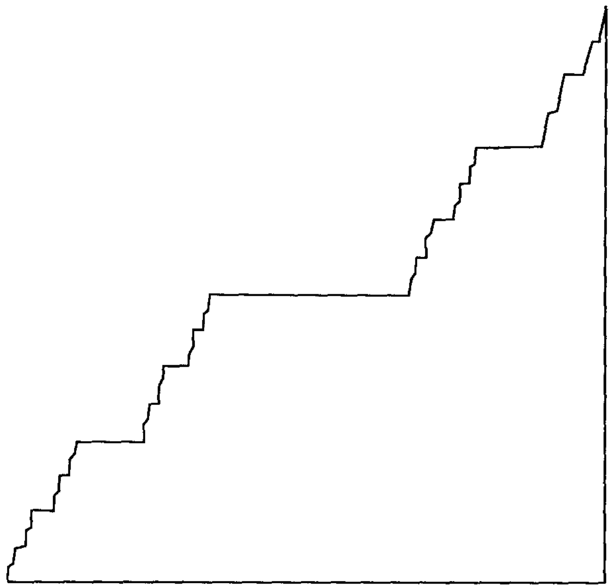


图 5.2　魔鬼台阶(devil staircase)曲线——自仿射数学分形的例子

些区间上的密度为$(3/2)^2$，其他点上则为0。不难看出，最终得到的是Cantor集合。假定用x表示$[0, 1]$上某点的位置，$C(x)$表示上述收缩过程无限持续到极限时的密度分布函数。$C(x)$在Cantor集合上为无限大，在其他点则为0。被称作魔鬼台阶的函数$\mathrm{d}(x)$，定义为$C(x)$的积分，即

$$\mathrm{d}(x) = \int_0^x C(s)\mathrm{d}s$$

$\mathrm{d}(x)$函数如图5.2所示。从图中可以看出，这个函数在Cantor点集之外所有地方的微分都是0，它的形状有些像上楼梯的台阶，但很不规则。这样的函数在物理学许多方面(例如磁畴之间存在库仑相互作用时，外磁场(H)和自发磁化(q)的关系研究)都有应用。

魔鬼台阶也可通过迭代作图方法产生。将单位线段三等分，使其中间部分1/3的线段向上平移距离1/2，然后保持不动。第二步，在两端的两段1/3的线段中再进行三等分，并使其中间的线段分别向上平移$(1/2)^2$和$1/2+(1/2)^2$。不断重复这个迭代过程，就可以得

到如图 5.2 所示的魔鬼台阶曲线。

任意取图 5.2 的一部分，如取[0，1/3]的一段。在横坐标方向放大 3 倍($b=3$)，在纵坐标方向放大 2 倍($b^H=2$，$H=\ln2/\ln3$)，就得到了和图 5.2 整体完全(严格)相似的图形。又如取[2/3，7/9]的一段，在横坐标方向放大 9 倍($b=9$)，在纵坐标方向放大 4 倍($b_H=4$，$H=\ln4/\ln9=\ln2/\ln3$)，仍得到了和图 5.2 完全相似的图形。魔鬼台阶的任一部分，经过自仿射变换后，仍和整体(严格)相似。它是一个自仿射数学分形。

上述魔鬼台阶，是自仿射数学分形的一个例子。在第 2 章介绍迭代函数系(IFS)的时候，已经出现了不同方向上具有不同变换系数的线性变换，这种各向异性的线性变换构成的迭代函数系，可以用来产生自仿射数学分形。

魔鬼台阶是自仿射分形的例子，它不是一个自相似分形，让我们来解释这一点。魔鬼台阶下方的可以分为 6 个相等的小魔鬼台阶(图 5.3)。编号为 1 的小块是将原始的魔鬼台阶在垂直方向压缩 2 倍，而在水平方向压缩 3 倍而得到的，两个方向的压缩倍数是不一样的，而在自相似分形中，部分是由整体在各个方向都压缩同样的

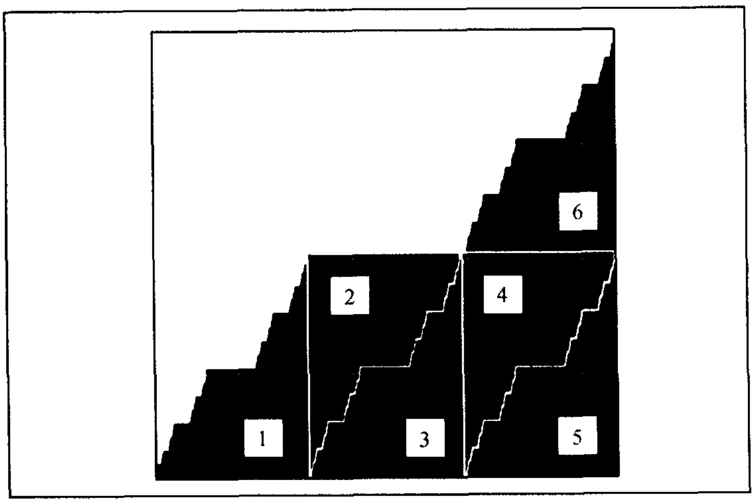


图 5.3　魔鬼台阶是一个自仿射分形，但不是自相似分形

倍数生成的，因此，魔鬼台阶不是自相似分形。编号 6 的小块情况与编号 1 的小块相同。一个边长为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$的长方形正好能够容纳编号 1 的小块和其旋转 180°的另一个小块，图 5.3 中的编号为 2，3，4，5 的小块就是这样生成的。这种在不同的方向上压缩不同的倍数，正是自仿射分形的特点。

5.2 自仿射统计分形

在统计分形那一章中，介绍过用随机行走方式产生的一维 Brown 运动曲线，若用 t 代表时间，用 $B(t)$代表 Brown 运动与初始位置的偏离，显然 $B(t)$是一簇随机变化的曲线簇。我们证明了：

$\mathrm{E}(B(t))=0$　　$B(t)$数学期望为零

$D(B(t))\sim T$　　$B(t)$的方差与 T 成正比

$\sigma(B(t))\sim T^{1/2}$　　$B(t)$的均方差与 $T^{1/2}$成正比

其中 T 是研究 Brown 运动的时间段$[0, T]$的上限，如果取均方差 $\sigma(B(t))$作为描述该曲线的统计特征量的话，则有

$$f(t)=\sigma(B(t))\sim T^{1/2}$$

$$f(bt)=\sigma(B(bt))\sim b^{1/2}T^{1/2}$$

$$f(bt)\sim b^{1/2}f(t)$$

也就是，Brown 运动曲线是自仿射统计分形。

1985 年，Mandelbrot 推广了 Brown 运动的概念（Mandelbrot，1985，1968），引入分数 Brown 运动(fractal Brown motion)，简写为 fBm。所谓分数 Brown 运动，是指当研究时间段$[0, T]$上的一个随机的时间函数 $BH(t)$，它具有以下统计特征：

① $\mathrm{E}(B_H(t))=0$　　$B_H(t)$的数学期望值为零；

② $D(B_H(t))\sim T^{2H}$　　$B_H(t)$的方差与 T^{2H}成正比；

③ $\sigma(B_H(t))\sim T^H$　　$B_H(t)$的均方差与 T^H 成正比；

④ $H\in[0, 1]$　　$H=1/2$ 的 Brown 运动是 fBm 的特例。

关于分数 Brown 运动，有三点是要提到的：

(1) 如果取均方差 $\sigma(B_H(t))$作为它的统计特征量，则

$$f(t)=\sigma(B_H(t))\sim T^H$$
$$f(bt)=\sigma(B_H(bt))\sim b^H T^H$$

所以

$$f(bt)\sim b^H f(t)$$

由定义可知，分数 Brown 运动是一个自仿射统计分形。也就是说，$B^H(t)$和$\frac{1}{B^H}B^H(bt)$在统计上是没有区别的。

(2) 分数 Brown 运动的统计特征取决于研究时间段的长度，而与开始时间无关，这是因为

$$\sigma[B(t_1)-B(t_2)]\sim(t_1-t_2)^H \tag{5.2}$$

只要

$$\sigma[B(t_3)-B(t_4)]\sim(t_3-t_4)^H$$
$$t_3-t_4=t_1-t_2$$

则有

$$\sigma[B(t_1)-B(t_2)]=\sigma[B(t_3)-B(t_4)]$$

(3) 关于分数 Brown 运动的分维。现在我们用数盒子方法来求 fBm 的局部分维数。研究定义在[0，T]区间上的作为时间函数的 fBm。首先引进一个参考的长方形盒子，它的宽度是 T，高度为$\sigma_T=\sigma(T)=\sigma(B(t))$。接着，我们把区间 T 分成 n 个相等的长度是 T_n，高度 $\sigma_n=\sigma_T/n$ 这些小盒子的宽与高之比与原来的参考盒子是一样的。但是与每个 T_n 相应的 fBm 的标准差却不等于 σ_n，而是 $\sigma_{T_n}=\sigma(T_n)$。我们来确定用大小 $T_n\sigma_n$ 的盒子覆盖宽 T、高 σ_{T_n} 的盒子数 N_n，其 N_n 为

$$N_n=\frac{T\sigma_{T_n}}{T_n\sigma_n}=n^2\frac{\sigma_{T_n}}{\sigma_T}$$

而 $N_n\sim T_n^H$，代入上式

$$N_n=T^{2-H}/T_n^{2-H}$$

联系 4.2 节中关于统计分形的公式

$$N_n\sim 1/T_n^D$$

于是有

$$D=2-H \tag{5.3}$$

这就是自仿射分形中求局部(local)分维数的公式，它将分维 D 与

Hurst 指数 H 联系了起来。

自仿射分形的重要特点是它的各向异性。当对上面介绍的 Brown 运动曲线进行放大时(图 4.4)，在 t 轴放大了 b 倍，而在纵坐标方向放大了 b^H 倍。注意 H 是位于[0, 1]区间的指数，一般小于 1。当 b 很大时($b\to\infty$)，在时间轴上的放大率比纵轴方向的放大率为大，从整体来看，曲线越来越平滑。$b\to\infty$ 的极限情况下，曲线变成了一条直线。一条直线的维数 $D=1$。这叫做自仿射分形的整体维数(global dimension)。

如果 b 值不是太大时，无论放大或缩小，自仿射曲线将随时间而起伏变化，这时式(5.3)给出了求曲线分维的公式。这时求出的维数叫做局部维数(local dimension)。

对于自仿射分形，描述整体行为的分形维数与描述局部行为的分形维数不相等，这一点表明了它具有与自相似分形完全不同的特点。自仿射分形维数与所选择的单位有关。如果选择的单位比较大，则测出来的是整体维数，若选择的测量单位比较小，则可以测出曲线的局部分形维数。这两者之间的情况十分复杂，需专门讨论。

5.3 正问题——自仿射分形制图术

研究自仿射分形有两个方面的问题。一方面的问题是已知自仿射分形的参数(D 或 H 指数)，绘制出自仿射分形的图形，这叫做正问题。另一方面的问题是面临着实际观测资料和图形，判断它是否具有自仿射相似性，以及如果是自仿射分形的话，其参数应如何选取，这类问题是反问题。

我们以绘制 Brown 运动曲线为例，说明正问题的一般求解方法(详见 Barnsley *et al.*, 1988)。这里所用的方法叫做中点位移法(random midpoint displacement method)。

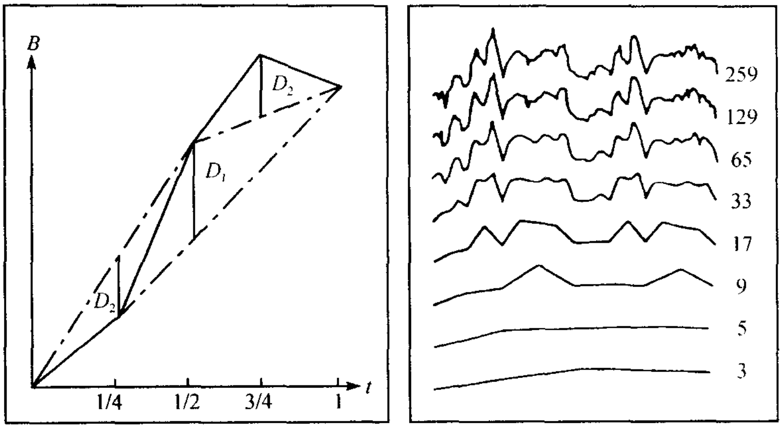
在作正问题时，我们利用了计算机的一个产生随机数的功能：给定数学期望 0 和均方差 σ 后，计算机能产生一组随机数 B_i($i=1$, 2, …, N)，

$$E(B_t)=0$$

$$\mathrm{Var}(B_t)=\sigma^2$$

现在我们来制造一个[0，1]区间上的 Brown 运动(图 5.4)。取

$$B(0)=0$$



(a)　　　　(b)

图 5.4　正问题的一般求解方法

(a) 用中点位移法生成 fBm 的示意图。说明见正文。图中计算了前 2 步，给出了 5 个点的值，点与点之间以直线相连，表示线性插值；(b) 用中点位移法生成的 Brown 运动。从下至上依次给出了计算的前 8 步结果，分别计算了 3，5，9，…，259 个点的数值

然后让计算机按数学期望值为 0，方差为 σ^2 的要求，产生一个随机数，令这个随机数为 $B(1)$，显然

$$E(B(1))=0$$

$$\mathrm{Var}(B(1))=\sigma^2$$

现在用中点位移法造出(0，1)中点 $t=\frac{1}{2}$ 的 Brown 运动值：

令

$$B\left(\frac{1}{2}\right)-B(0)=\frac{1}{2}(B(1)-B(0))+D_1 \tag{5.4}$$

其中 D_1 是一个随机变量，且 $E(D_1)=0$。由自仿射的性质，按公式(5.2)，我们有

$$\mathrm{Var}\left[B\left(\frac{1}{2}\right)-B(0)\right]=\left(\frac{1}{2}-0\right)\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2$$

另一方面，由式(5.4)

$$\mathrm{Var}\left[B\left(\frac{1}{2}\right)-B(0)\right]=\frac{1}{4}\mathrm{Var}[B(1)-B(0)]+\mathrm{Var}(D_1)$$

$$=\frac{1}{4}\sigma^2+\mathrm{Var}(D_1)$$

由上面两式，可得随机数 D_1 的方差为

$$\mathrm{Var}(D_1)=\Delta_1^2=\frac{1}{4}\sigma^2$$

于是，在知道随机数 D_1 的数学期望值和方差的条件下，D_1 可以由计算机产生出来。

同样方法，可以计算 $B\left(\frac{1}{4}\right)$或 $B\left(\frac{3}{4}\right)$：

$$B\left(\frac{1}{4}\right)-B(0)=\frac{1}{2}\left(B\left(\frac{1}{2}\right)-B(0)\right)+D^2$$

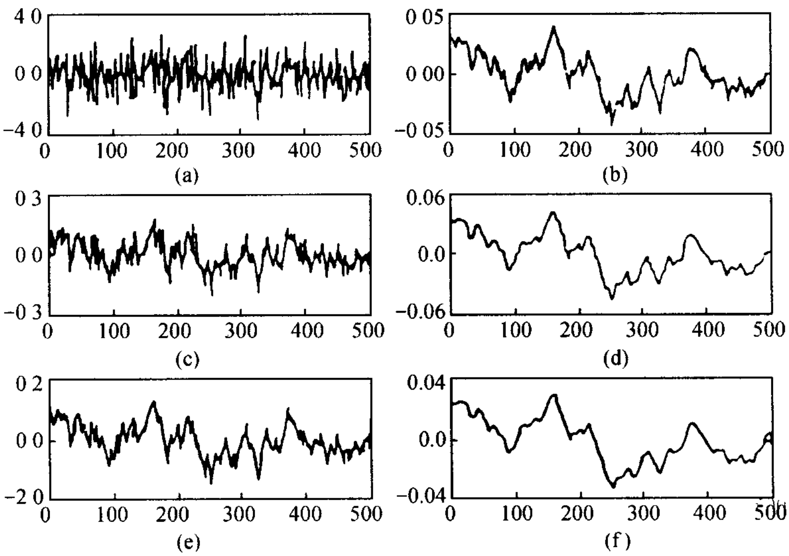


图 5.5　用自仿射分形方法人工合成的 fBm 运动

(a) 高斯白噪声序列；(b) $H=0.1$，$D=1.9$；(c) $H=0.3$，$D=1.7$；(d) $H=0.5$，$D=1.5$(Brown 运动)；(e) $H=0.7$，$D=1.3$；(f) $H=0.9$，$D=1.1$

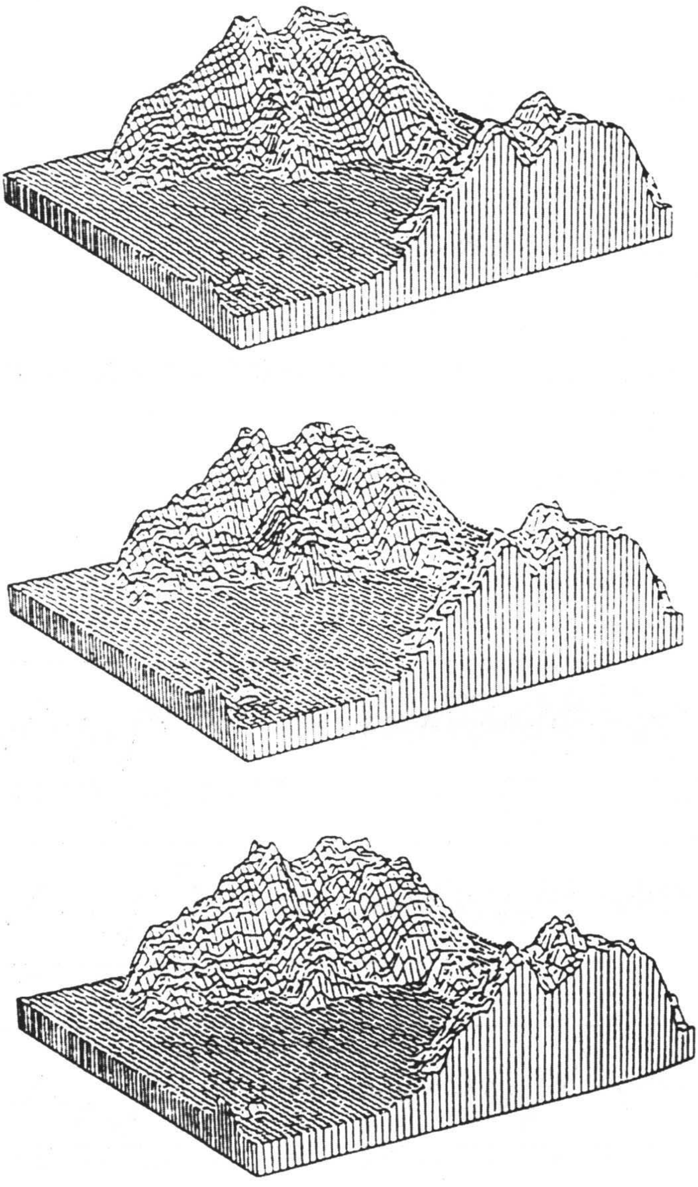


图 5.6　自仿射分形制图术的一个例子

绘制地形图(引自 Barnsley *et al.*，1988)

其中

$$E(D_2)=0$$

$$\mathrm{Var}(D_2)=\Delta_2^2=\frac{1}{8}\sigma^2$$

对于第 n 次计算，可以求出 $\Delta t=2^{-n}$ 的 Brown 运动的函数值，其相应的随机变量 D_n 的

$$\mathrm{Var}(D_n)=\Delta_n^2=\frac{1}{2^{n+1}}\sigma^2$$

图 5.4(a)给出了用中点位移法产生 Borwn 运动的示意图，图 5.4(b)给出了产生的一个实际例子。

解决正问题的方法除了中点位移法外，还有频谱方法(参看 Turcotte 著《分形与混沌》一书第七章，地震出版社，1993)。

图 5.5 和图 5.6 表示用自仿射方法产生的分形，图 5.5 是一组 fBm 曲线，图 5.6 是立体地形图。

值得注意的是：图 5.6 中所示地形图是一个自仿射分形。每次合成出来的地形图不尽相同，但其统计特征——例如分形维数却是相同的。分形制图术显示了一种复杂性与规律性并存的结果(详见 Barnsley *et al.*，1988)。

5.4 反问题——相关函数和功率谱密度

现在讨论反问题：如果我们有了一条时间曲线或一些实际测量的资料，如何判断它们是自仿射统计分形，而且自仿射分形的参数是什么?

统计分析中，相关分析和功率谱分析是十分有用的工具，讨论反问题从介绍相关分析和功率谱函数开始。

如果我们有一随机变量 $B(t)$(不妨设 $E(B(t))=0$，这是为讨论的方便，对于数学期望值不等于零的那些随机变量，可以将每个变量减去一常数即可得到数学期望值为零的随机变量)，定义其自相关函数 $R(t,\tau)$为

$$R(t,\tau)=E[B(t)B(t+\tau)]$$

显然，$R(t,\tau)$是一个与 t 和 τ 有关的随机函数。在各态历经假设下，若 $B(t)$是一平稳随机过程的话，自相关函数 $R(t,\tau)$中的 t 被平均掉，其自相关函数变成了 $R(\tau)$，它不再是随机函数了。

$$R(t,\tau)=\mathrm{E}[B(t)B(t+\tau)]$$

显然

$$R(0)=\mathrm{E}[B(t)^2]=\mathrm{E}[(B(t)-\mathrm{E}(B(t)))^2]=\mathrm{Var}B(t)=\sigma^2 \tag{5.5}$$

式(5.5)建立了自相关函数 $R(\tau)$与 $B(t)$方差之间的关系；方差就是 $\tau=0$ 时的自相关函数。

若 $B(t)$是分数 Brown 运动的话，下面具体讨论它的自相关函数。为简单计，我们讨论一特殊情况：$\tau=2t$

$$\begin{aligned}R(\tau)=R(2t)&=\mathrm{E}[B(-t)\cdot B(t)]\\&=\frac{-\mathrm{E}[(B(t)-B(-t))^2]+2\mathrm{E}[B(t)^2]}{2}\\&=\frac{1}{2}[-(2t)^{2H}+2t^{2H}]\\&=\frac{2^{1-2H}-1}{2}\cdot\tau^{2H}\end{aligned} \tag{5.6}$$

从式(5.6)可以看出，当 $H=1/2$ 时，$R(\tau)=0$，这表明 Brown 运动的时间相关函数为零，它是一个独立的随机无规过程，过去的行为不影响将来的行为，也就是通常所说的马尔科夫过程。当 $H\neq 1/2$ 时，相关系数不为零，表示存在着长程的相互作用，过去的增长(或衰退)过程，在今后是否保持增长(或衰退)过程，视式(5.6)中的系数而定。当 $H>1/2$，是负相关；当$H<1/2$，是正相关。

功率谱分析在统计分析中是一个有用的工具。我们知道，Fourier 分析也是一种常用的谱分析技术，但是随机函数的 Fourier 谱也是随机函数。因此，很少使用 Fourier 谱。而随机函数的功率谱不是随机函数，而是确定的函数，因此，分析统计现象时经常用功率谱。

与自相关函数有对应关系的是功率谱密度函数，或简称谱密度函数 $S(\omega)$，它定义为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.7}$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

下面来说明，为什么和相关函数 $R(\tau)$对应的 $S(\omega)$是功率谱密度。

若 $B(t)$表示一质点对平衡位置的位移，系统的刚度 $K=1$，则 $KB(t)$为内力，$\frac{1}{2}KB(t)^2$ 为单位时间内的应变能，那么在振动持续时间 T 之内的总应变能为(系数 1/2 略去)

$$\overline{W} = \int_0^T KB(t)^2\mathrm{d}t$$

功率为

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T KB(t)^2\mathrm{d}t = \frac{K}{T}\mathrm{E}[B(t)^2]$$

将式(5.5)代入并略去常系数

$$W=R(0) \tag{5.8}$$

另一方面，功率是由各种频率成分贡献而成，

$$W = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{5.9}$$

式中 $S(\omega)\mathrm{d}\omega$ 代表了(ω，$\omega+\mathrm{d}\omega$)频率成分对总功率的贡献，因此，这就是为什么 $S(\omega)$被称为功率谱密度的原因。

从上面讨论可知，对于一般的平稳随机现象

$$R(0) = \mathrm{Var}[B(t)]$$

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega$$

而对于自仿射分形 fBm 的特定条件，若 $B(t)\in[0, T]$

$$\mathrm{Var}[B(t)] \sim T^{2H} \tag{5.10}$$

将上面三个公式合并考虑，并注意到 $T=2\pi/\omega$，有

$$\frac{2\pi^{2H}}{\omega^{2H}} \sim \frac{1}{2\pi}\int S(\omega)\mathrm{d}\omega$$

上式成立的充分必要条件是

$$S(\omega)\sim\omega^{-\beta} \tag{5.11}$$

且

$$\beta = 2H + 1 \tag{5.12}$$

考虑到式(5.3)，我们可将描述自仿射分形的三个参数 D、H 和 β 的关系写出，

$$\beta = 2H + 1 = 5 - 2D \tag{5.13}$$

图 5.7 给出了三个 fBm 的图形，说明参数 β、D 和 H 对图形特征的影响，从图中可以看出，D 越小，曲线的高频成分越少；反之亦然。

综上所述，处理反问题时，最常用的方法是求出所研究的函数

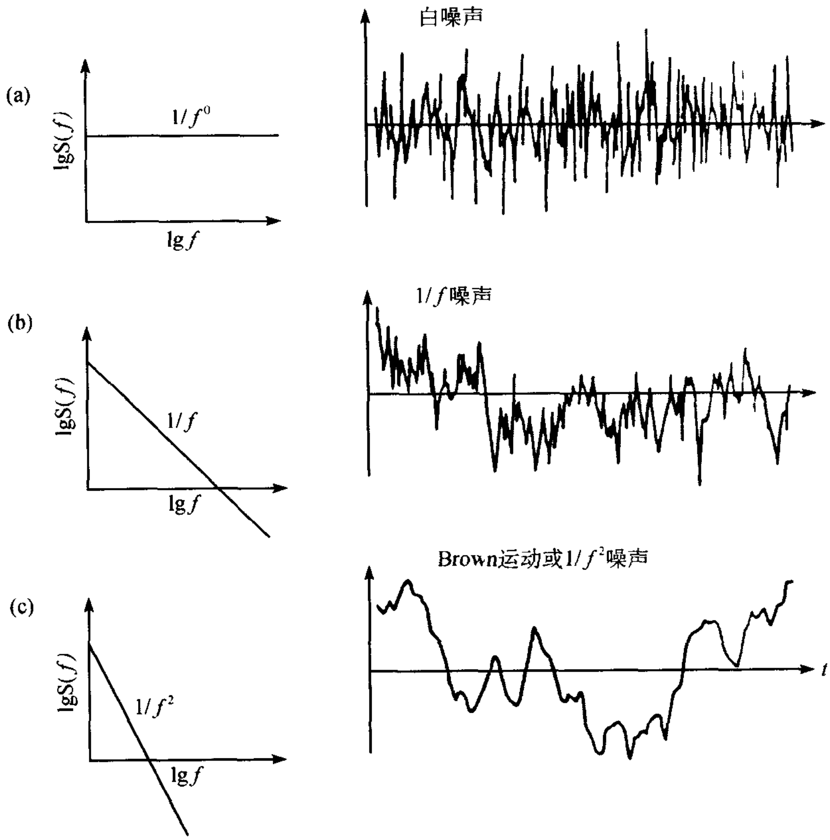


图 5.7 几种常见的 fBm

(a) 白噪声，$\beta=0$；(b) $1/f$ 噪声，$\beta=1$，$H=0$，$D=2$；

(c) Brown 运动，$\beta=2$，$H=0.5$，$D=1.5$

关系(如时程曲线)的功率谱。看功率谱是否符合幂指数分布(5.11)式，若符合的话，该函数关系是一自仿射分形，且自仿射分形参数可以通过式(5.13)求出来。

5.5 地貌与自仿射分形

函数随空间坐标、随时间的变化常常利用自仿射分形来进行分析。

用自仿射分形分析函数随时间变化的例子有很多。例如气候的长期变化(Nicolis, 1984)，降雨量随时间的变化(Turcotte, 1993)，噪声分析(Voss *et al.*, 1988)，自然灾害随时间的变化以及在某一地点观测到的各种地球物理场随时间的变化等。这些时间过程都可以用自仿射分形来进行分析。Fluigeman 和 Snow(1989)发现，海底岩芯中氧同位素比值的时间变化可以用自仿射分形来表示，而通常认为氧同位素的比值和当时的纬度成比例。因此，对岩芯中氧同位素的时间分析，提供了气候变化服从分形统计学的证据。关于时间变化的分析，我们在本书第七章还要从另外的角度进行介绍。

用自仿射分形来分析函数随空间变化的例子也很多。例如地球物理测井。通常为了了解地下岩石的性质，需要打一口井，在该井中进行岩石各种性质的测量，研究测量结果与井深的关系。典型的测井有声波测井、电导率测井、中心激活测井和孔隙度测井等。测量得到的量与深度的关系就像时间序列一样，只不过把时间变数改为空间变数，因此也可以应用(空间)频谱分析技术。在声波测井(Todoeschuck *et al.*, 1990)和孔隙度测井(Hewett, 1986)中，都成功地应用了自仿射分形的分析技术。测井研究的是岩石性质在深度方面的分布规律，不仅对垂直方向的资料解释可以应用自仿射分形分析，对水平方向的资料解释也可以应用这些技术。应用地球物理学的发展已经历了几个阶段：20 世纪 30～50 年代，应用地球物理学主要用来寻找矿产，60～70 年代用来找油，80 年代从环境科学的需要出发，主要是找水和研究水的运移规律。进入 90 年代以来，为工

程需求提供地下详细而可靠的岩石特性资料已成为应用地球物理学发展的主要方向之一。为了了解地下情况，人们往往需要打井并进行井中测量。但是由于打井费用昂贵，不可能将井打得很密。因此通过有限的井，如何了解这些井之间岩石的性质，就成为了当前急待解决的问题。幂指数频谱的一个重要应用是在测量点资料之间进行外推插值。这种外推插值可以利用测量资料具有幂指数这一特性。在这方面，自仿射分形的分析技术提供了一种新的分析方法，有着巨大的潜在应用前景。

自仿射分析技术特别适用于分析物体的表面(Russ，1994)。所谓物体的表面，小至岩石和金属材料的破裂断面(Brown *et al.*，1985)，大至地球表面和海底的地形地貌(Fox，1989；Mareschal，1989)。能够产生连续的幂指数频谱的自然现象，将不具有特征频率，而且在很宽的范围内是标度不变的。利用这些特性，在研究地貌问题时，自仿射分形是很有力的工具。图 5.8 给出了在美国俄勒岗州三个不同地区的 24 个例子。我们沿经线和纬线按每公里 7 个点

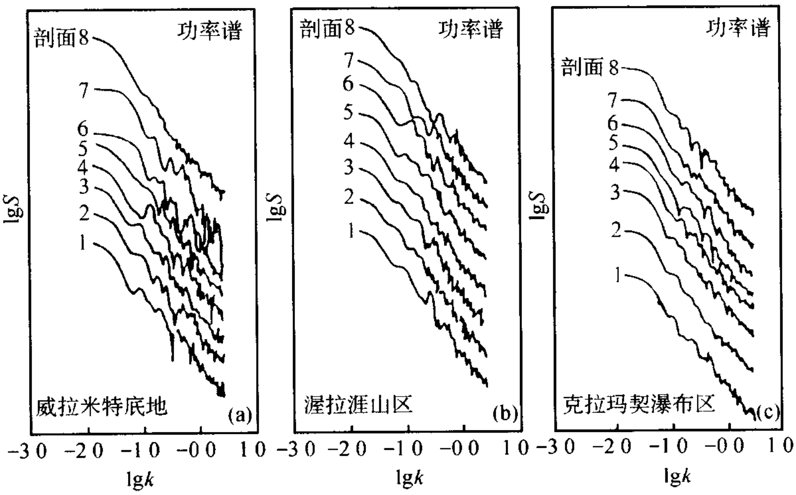


图 5.8　美国俄勒冈州三个不同构造地貌地区沿一维剖面得到的功率谱密度与波数的关系图

双对数坐标中的线性关系表示这样的地貌是自仿射分形的。不同剖面结果在竖直方向稍加移动，使它们错开避免重叠(据 Fox *et al.*，1985)

将地形数字化。对于三个地区中的每一个地区，沿经度和纬度方向都安排由每条 512 个点组成的等间距分布的 20 条剖面。如图 5.8 所示的那样，在这三个地区，地形剖面的功率谱对数与波数的对数之间呈现了很好的线性关系，表明功率谱密度 $S(\omega)$与波数 R 之间存在着幂指数关系，进而说明这样的地貌是自仿射分形的。图 5.8 中，每个地区都给出了 8 个典型的结果。利用式(5.11)对每条剖面应用最佳拟合技术，得到分维数 D 的平均结果是

$$D=1.5$$

值得指出的是，第三章中讨论过海岸线的分维，海岸线是沿海地貌与海平面的交线，其分维分析是一种对地貌在水平方向的剖面的分析，即等高线的分维分析。用类似的方法还可以对地形图上任何高度的等高线进行分形分析(Norton *et al.*，1989)。但本章对地貌的分析，则是对地貌在垂直方向的剖面的分析。水平剖面和垂直剖面并不完全是一回事情，它们之间的联系，以及两种剖面分维的关系是需要进一步研究的问题。

练　习　题

1. 证明：从自相似或自仿射表面测的功率谱具有幂律谱密度关系，即

$$S(\omega)\sim\omega^{-\beta},\ \beta=\begin{cases}5-2D & (\text{剖面})\\ 7-2D & (\text{剖面})\end{cases}$$

式中 D 为分维。

2. 如果地貌是自仿射分形，说明：山脉与谷地的高与宽之比在所有尺度上都应是一样的。进一步，若知道 $\beta=0.8$，试求山脉与谷地的高、宽之比值。

3. 红噪声的定义是 $\beta=1$，其分维 D 为多少？其标准方差 σ 与时间间隔 T 的关系如何？红噪声是 fBm 的一个例子吗？如果是的话，原因何在？

4. 考虑如图 5.9 所示的河系的分形模型(引自 Turcotte，1993)。假定标度不变律成立，即 $h_1/h_2=h_2/h_3=R$。(1) 证明第 n 级河流的长度 P_n 由下式给出

$$P_n=h_1+h_2+h_3+h_4+\cdots=\frac{Rh_1}{R-1}$$

第$(n-1)$级河流的长度 P_{n-1} 由下式给出

$$P_{n-1}=h_2+h_3+h_4+h_5+\cdots=\frac{Rh_2}{R-1}$$

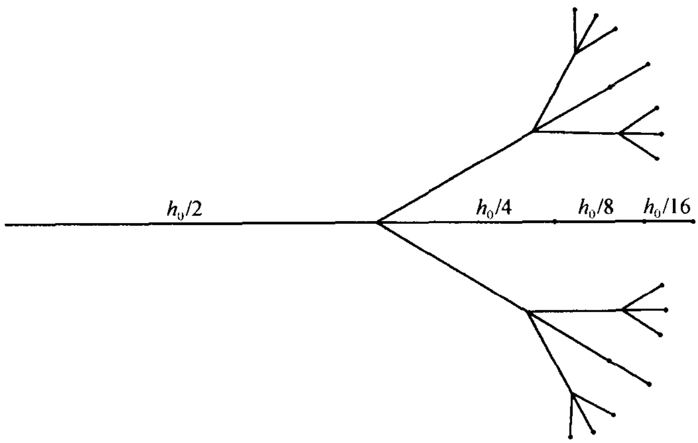


图 5.9　分形河系的模型

(2) 因为 $N_n=1$，$N_{n-1}=2$，$N_{n-2}=4$ 等，证明 $D=\ln 2/\ln R$。对于图 5.9 给出的情况($h_2=h_1/2$，等)，求出具体的 R 值。

第六章 多重分形

对于简单的分形，用一个分形维数就可以描述它的特征。但对于许多复杂的现象，它们包含多个层次，每个层次具有不同的统计特征。这时用一个参量就够了，需要用多个(有时甚至是无限多个)参量才能描述它们。这就是多重分形(multifractal)。我们首先从地学中的成矿过程谈起。

6.1 成矿作用模型

假定在 d 维(拓扑)空间中有一由质点凝聚成的分形，其分维为 D，质点集合的质量 $M(L)$与集合中质点数目 $N(L)$成正比，该分形体的密度为

$$\rho \sim \frac{M(L)}{L^d} \sim \frac{N(L)}{L^d} \sim L^{D-d}$$

当 $D<d$ 时，物体体积增长要比它的质量增长快。随着 L 的增大，密度会逐渐变小，物体也会变得愈来愈稀疏。对于这样的简单分形体，只需一个参量就能完全确定物体的密度。

对于复杂情况又怎样呢？Mandelbrot 说过这样一段话："高品位的铜矿的分布是不均匀的，主要集中在世界少数几个地区。如果进一步考察其中一个地区铜矿的分布，就会发现其分布仍然是不均匀的，主要集中在少数几个子区域之中。从统计意义来说，可以认为：在每一储铜区，无论其区域大小，高品位铜矿的相对分布都是相同的。"我们现在设想一个成矿过程的模型(图 6.1)。为了讨论方便，只限于讨论一维的模型。假定我们有一单位长度的线性地区。第一步，将该线性区分成三段，每段长 1/3。两端的两段，矿产聚集的概率为 P_1，中间一段为 P_2，且

$$P_2 > P_1$$

这样得到的结果如图 6.1(a)所示，矿产相对富集在中间的部分。第二步($k=2$)，在 0～1/3，1/3～2/3，2/3～1 的三段地区，再次重复以上的过程，在第一步形成的富集区，矿产进一步向中间部位富集(图 6.1 (b))。第三步($k=3$)的结果见图 6.1(c)。图 6.1(d)给出无限步以后的情况，这时，成矿作用结束，矿产形成了。从上面的例子我们可以看出，最终形成的矿产是分形的，但十分复杂。为了完整地描述它，仅用单一一个分维数是不够的，需要多个(甚至无穷

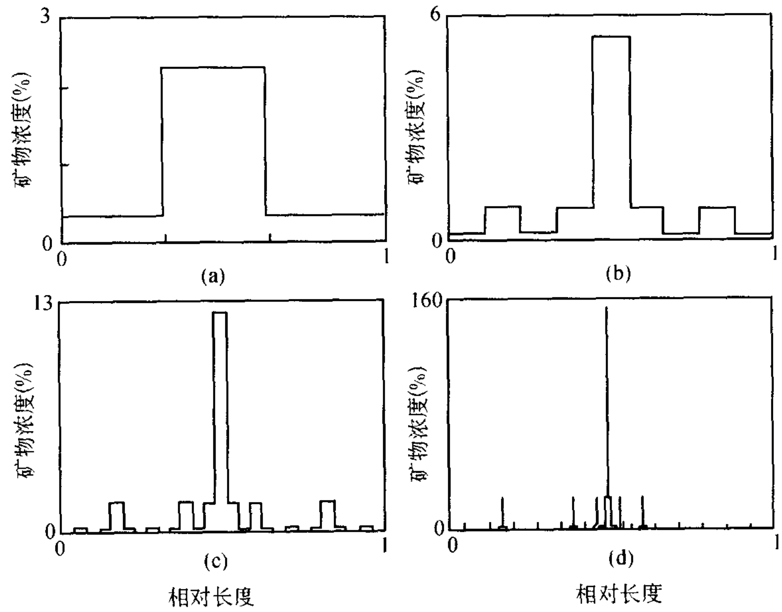


图 6.1　成矿模型示意图

假定在单位长度的线性区均匀分布着某种矿物，示意图给出了矿物不断向少数地区富集最后形成矿产的过程。(a) 第一步($k=1$)，将线段三等分，两端两段矿物的密度是 P_1，中间段密度为 P_2，$P_2 > P_1$ ($2P_1 + P_2 = 1$)，显然，矿物向中间富集；(b) 第二步($k=2$)，在 0～1/3，1/3～2/3，2/3～1 的三段地区再一次重复上述富集过程，9 个子段的矿物浓度为 P_1^2，P_1P_2，P_1^2，P_1P_2，P_2^2，P_2P_1，P_1^2，P_1P_2，P_1^2，矿物的富集进一步集中在更少数地区；(c) 第三步($k=3$)的结果；(d) 无限多次富集作用后的结果，富集作用完成，矿产形成，这时，矿产的分布是一个分形，但是一个复杂的分形，需要多个参数才能描述

多)参量才能描述它。

6.2 多重分形

从图 6.1 可以看出，随着 k 的增加，矿物分布的不均匀性就越来越明显了，为了定量地描述这种不均匀性，我们把研究对象(取其线度为 1)分成 N 等分，每一等份的“盒子”线度记为 ε，定义第 i 个盒子的密度分布函数 P_i 为

$$P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha} \tag{6.1}$$

其中 ε 是一个远远小于研究对象线度的测量单位。对于完全均匀的分布，显然有 $P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{d}$($d$ 是研究对象所占据的拓扑维数)。对于一个简单的分形体：$P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D}$，式(6.1)给出了对于一般的分形的分布特征。非整数 α 一般称为奇异指数，它们取值和盒子的位置有关。

现在我们把在分形上具有相同 α 值的小盒子的数目记为$N_\alpha(\varepsilon)$，它是与 ε 大小有关的，并可写成

$$N_\alpha(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)} \tag{6.2}$$

将式(6.1)与 $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$的简单分形公式相比，立即可以看出$f(\alpha)$的物理意义是表示具有相同 α 的值的子集的分形维数。一个复杂的分形体，它的内部可分为一系列不同 α 值(P_i 值)所表示的子集。这样 $f(\alpha)$就给出了这一系列子集的分形特性。

为了了解这一系列子集分布特性，借助于统计物理中的矩表示方法。为此，定义函数 $X_q(\varepsilon)$，它是对各个小盒子的概率加权求和，

$$X_q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N} P_i^q = \varepsilon^{\tau(q)} \qquad q \in (-\infty, \infty) \tag{6.3}$$

并定义广义分形维数 D_q 为

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln x_q(\varepsilon)}{\ln\varepsilon} = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{N} P_i^q\right)}{\ln\varepsilon} \tag{6.4}$$

定义 $X_q(\varepsilon)$的目的是显示各种大小的 P_i 的作用。从式(6.3)可以看出，若有两个小区域 m 和 j 的概率分别是 P_m 和 P_j，且 $P_m \gg P_j$。当 $q \gg 1$ 时，在 $\sum P_i^q$ 求和中显然是 P_m^q 起主要作用，这时的 x_q 和 D_q 反

映的是概率高(或稠密的)区域的性质。如果在 $q\to\infty$ 极限条件下，可以只考虑 P_{max} 而忽略其他的小概率，这样就大大简化了 x_q 的计算。反之，当 $q\ll1$ 时，x^q 反映的是分布中概率比较小(或疏稀的)区域的性质。所以，通过加权的处理，就把一个分形分成许多具有不同奇异程度的区域来研究。多重分形正是这样的一个由有限几种或大量具有不同分形行为的子集合叠加而组成的非均匀分维分布的奇异集合。因此，多重分形概念是原始分形概念对于非均匀分形的自然推广(Grassberger，1983；Hentshel and Procaccia，1983；Mandelbrot，1989)。利用多重分形这个概念，使我们能分层次地来了解分形内部的精细结构。下面证明式(6.4)定义的 D_q 在 $q=0$，1，2 时分别给出以前介绍过的容量维 D_0、信息维 D_1 和关联维 D_2。

首先看 $q=0$ 的情况。对于 $P_i\neq0$ 的盒子，$P_i^0=1$，对于“空盒子”，$P_i^0=0$，因此 $P_i^0=0^0=0$。所以按照式(6.3)，$x_q(\varepsilon)=N(\varepsilon)$，这里 $N(\varepsilon)$ 表示密度为不为零的盒子总数(非空盒子数)，这时式(6.4)变为

$$D_0=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}$$

这与定义容量维 D_0 的公式(3.3)是完全一致的。这表明：$q=0$ 时，x_0 反映的是研究对象的空间几何特性，与待测物理量的不均匀分布无关。

再看 $q=1$ 的情况，这时 $x_q(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{N}P_i=1$ 。在 D_q 的公式(6.4)中，分子和分母都出现了零。这时的 D_1 必须要数学变换后才能得出。令

$$D_q=\frac{1}{q-1}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{N}P_i^q\right)}{\ln\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{N}e^{q\ln p_i}\right)}{(q-1)\ln\varepsilon}$$

对 $q=1$，利用海必达法则，对上式分子、分母同时对 q 求微商，有

$$D_q=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\sum_{i=1}^{N}P_i\ln P_i}{\ln\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{N}P_i\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\sum_{i=1}^{N}P_i\ln P_i}{\ln\varepsilon}$$

这与以前式(3.4)定义的信息维完全是一致的。

现在讨论 $q=2$ 的情况。把空间分成 m 个小盒子，每个盒子的大小是 ε。假定有 N 个质点 X_1，X_2，…，X_N。含有 X_i 点的盒子 b(b 是盒子的序号)中落入的质点数 $N_b(i)$为

$$N_b(i) = \sum_j \theta[\varepsilon - (X_i - X_j)]$$

其中

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

则距 X_i 点距离小于 ε 的点对数目的比例 $C_i(\varepsilon)$为

$$C_i(\varepsilon) = \frac{N_b(i)}{N} = P_b(i)$$

对 $C_i(\varepsilon)$求平均，可得所有点对中距离小于 ε 的点对数目占总点对数目的比例 $C(\varepsilon)$

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N}\sum_i C_i(\varepsilon) = \frac{1}{N}\sum_i P_b(i)$$

上式的求和，是先固定 i 点，计算 $P_b(i)$，然后令 $i=1$，2，…N 计算求和。我们也可以采取另一种等价的求和办法。先固定盒子 b，计算 P_b 和盒子中的点数 $N_b(i)$，N_bP_b 就是 b 盒子对整个求和的贡献，然后令 $b=1$，2，…，m，对所有的盒子求和。这样，上式变为

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) &= \frac{1}{N}\sum P_b(i) = \frac{1}{N}\sum_b \sum_{i\in b} P_b = \frac{1}{N}\sum_b N_b P_b \\ &= \sum_b P_b^2 \end{aligned}$$

只要我们对盒子重新编号，上式可写成

$$C(\varepsilon) = \sum_i P_i^2$$

由式(3.5)给出

$$D_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\left(\sum_i P_i^2\right)}{\ln\varepsilon}$$

这与式(6.4)是完全一样的。所以当 $q=2$ 时，式(6.4)给出的是关联维 D_2。由此可见，容量维 D_0、信息维 D_1 和关联维 D_2 都是广义分维 D_q 的一些特例。

将式(6.1)和式(6.2)，代入式(6.3)得

$$x_q = \sum_{\alpha} \varepsilon^{\alpha q - f(\alpha)}$$

由于ε很小，则在求和时，矩 x_q 仅当 $\alpha q - f(\alpha)$取极小值时贡献最大，由于 α 随 q 不同而变化，故极小值条件为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}[\alpha q - f(\alpha)]|_{\alpha=\alpha^*(q)} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}[\alpha q - f(\alpha)]|_{\alpha=\alpha^*(q)} > 0$$

由上面两式可以求出当 $\alpha q - f(\alpha)$取极小值时 α 的值 $\alpha^*(q)$来。这时 x_q 可以写成

$$x_q \sim \varepsilon^{\alpha^*(q)q - f(\alpha^*(q))}$$

代入式(6.3)和式(6.4)，得到

$$P(q) = q\alpha^*(q) - f(\alpha^*(q)) \tag{6.5}$$

$$D_q = \frac{1}{q-1}[q\alpha^*(q) - f(\alpha^*(q))] \tag{6.6}$$

式(6.6)表明，若知道 α 和它的谱 $f(\alpha)$，就可以求出 D_q 来。反过来，若知道了 D_q，我们也可以求出 α 来。将式(6.6)对 q 求微商，可得

$$\alpha^*(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}[(q-1)D_q] \tag{6.7}$$

上述关系式(6.1)～(6.7)构成了多重分形的理论核心，不论用 α，$f(\alpha)$或 q，D_q 作为独立参数都可以描述多重分形内部结构，可根据实际情况决定用哪一组参数。

6.3 例

应用多重分形的第一个例子，就是讨论前面介绍的成矿模型。我们从讨论成矿过程第 $k(k=1, 2, \cdots, \infty)$步的情况开始。对于第 k 级，盒子(即小区间)的大小。

$$\varepsilon = (1/3)^k$$

任何一个盒子中矿物富集的概率 P_t 为

$$P_t = P_1^m P_2^{k-m} = \varepsilon^{\alpha}$$

$$(m=0,1,2,\cdots,\text{且 } 0\leqslant m\leqslant k)$$

我们先讨论用 α，$f(\alpha)$参数表示的多重分形特征。为了讨论 $f(\alpha)$的定性行为，不失一般性，令 $P_1=0.3$，$P_2=0.4$。这样可以求出富集密度分布中的最大值 $P_{\max}$和最小值 $P_{\min}$：

$$P_{\max}=(0.4)^k=\varepsilon^{\alpha_{\min}}=(1/3)^{k\alpha_{\min}}$$

$$P_{\min}=(0.3)^k=\varepsilon^{\alpha_{\max}}=(1/3)^{k\alpha_{\max}}$$

同样，也可以由上面式子求出 α 的最大值 $\alpha_{\max}$和最小值 $\alpha_{\min}$

$$\alpha_{\min}=-\ln(0.4)/\ln 3=0.834$$

$$\alpha_{\max}=-\ln(0.3)/\ln 3=1.096$$

通过图 6.1，可以计算概率等于 $P_1^m P_2^{k-m}$ 的小盒子的数目$N_\alpha(\varepsilon)$，通过归纳法可知

$$N_\alpha(\varepsilon)=2^m\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}=\frac{k!}{(k-m)!\ m!}$$

是二项式系数。特别对于相应于 $\alpha_{\max}(m=k)$和 $\alpha_{\min}(m=0)$的$N_\alpha(\varepsilon)$为

$$N_{\alpha_{\max}}(m=k)=2$$

$$N_{\alpha_{\min}}(m=0)=1$$

因为

$$N_\alpha\sim\varepsilon^{-f(\alpha)},\qquad \text{且 }\varepsilon\text{ 很小}$$

所以

$$f(\alpha_{\max})=f(\alpha_{\min})=0$$

于是我们可以知道 $f(\alpha)$-α 曲线是一条钟形的曲线，它和 α 轴相交在 $\alpha_{\min}$，$\alpha_{\max}$两点(图 6.2 (a))。

若知道一个多重分形的 $f(\alpha)$-α 曲线，多重分形的参数可以从该曲线上求出。例如，①用一条斜率为 q 的直线 ACS 和 $f(\alpha)$钟形曲线相切于 C 点，C 点的坐标分别是 $f(\alpha_q^*)$和 α_q^*(这是因为在 C 点，满足$\frac{d}{d\alpha}[\alpha q-f(\alpha)]=0$ 的条件)。直线 ACS 的纵轴交点的截距 $OA=$

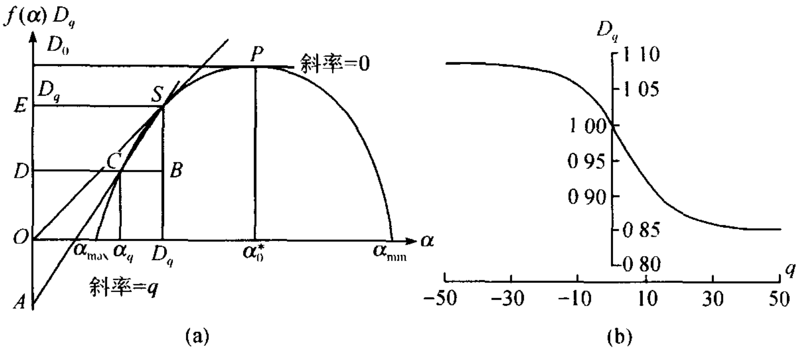


图 6.2　由成矿模型得到的矿产分布多重分形的特征

模型中 $P_1=0.3$，$P_2=0.4$（见图 6.1）。(a) 用 $f(\alpha)-\alpha$ 作多重分形参数得到的结果；(b) 用 D_q-q 作多重分形得到的结果

$r=-[\alpha_q^* q-f(\alpha_q^*)]=-\tau(q)$。这是由于 $\alpha_q^* q+r=f(\alpha_q^*)$，所以 $\alpha_q^* q-f(\alpha_q^*)=\tau(q)=-r$。②过 $f(\alpha)$-α 平面原点，作一斜率为 1 的分角线 OS，与斜率为 q 的 ACS 相交于 S 点，S 点的坐标是 D_q，证明如下：

设 S 点的横坐标为 x，$C\bar{B}=x-\alpha_q^*$

$$S\bar{B}=C\bar{B}\cdot q=q(x-\alpha_q^*)=\overline{ED}$$

$$\overline{OD}=f(\alpha_q^*)$$

$$O\bar{E}=\overline{OD}+\overline{ED}=q(x-\alpha_q^*)+f(\alpha_q^*)=\overline{OX}=x$$

$$x=\frac{1}{q-1}[q\alpha^*(q)-f(\alpha^*(q))]$$

对比式(6.6)，可见

$$x=D_q$$

因此，多重分形的参数可以用 $f(\alpha)$-α 曲线求出。

现在我们再接着讨论用 q，D_q 作为参数表示的多重分形的特性，由定义式(6.3)

$$\begin{aligned} x_q(\varepsilon) &= \sum_i P_i^q \\ &= \sum_\alpha N_\alpha(\alpha) P_i^q \\ &= \sum_{m=0}^{R} \binom{k}{m} (2P_1)^{mq} P_2^{(k-m)q} \end{aligned}$$

$$= (2P_1^q + P_2^q)^R$$

根据式(6.3)

$$\tau(q)=\frac{\ln x_q(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}=\frac{\ln(2P_1^q+P_2^q)^k}{\ln(1/3)^k}$$

$$=-\frac{\ln(2P_1^q+P_2^q)}{\ln 3}$$

再根据式(6.4)

$$D_q=\frac{1}{q-1}\tau_q$$

可以求出 D_q 来。图 6.2(b)给出了 $P_1=0.3$，$P_2=0.4$ 时由成矿模型后得到的多重分形的 D_q-q 曲线。可以看出，随着 q 的增加，D_q 逐渐减少，最后稳定在 D_∞ 的值。

在成矿模型中，若取 $P_1=1/2$，$P_2=0$，则我们得到的是典型的 Cantor 集合，这时

$$\tau(q)=-\frac{\ln(2P^q)}{\ln 3}=-\frac{\ln(2^{1-q})}{\ln 3}=(q-1)\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$D_q=\frac{1}{q-1}\tau(q)=\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

对于 Cantor 集合、Sierpinski 海绵这样的简单分形体，所有的 D_q 均相等。D_q 与 q 的关系化为通过 D_0 的一条水平线。但更复杂的分形体，原则上要用多重分形来描述。

第二个例子是地震空间分布的分形研究。地震与流体湍流存在一种类似性。湍流可以被理解为具有多重尺度次结构的一种破裂过程(Frisch *et al.*，1978；Fujisaka and Mori，1979)，Prasad 等(1988)更进一步证明湍流具有非均匀的分形结构。从长期(以地质年代为尺度)的地壳演变过程和岩石圈内重复发生的断裂及愈合考虑，我们不难理解目前地壳的非均匀分形结构和地震分布的多重分形特征。因此地震分布模式细微结构的刻画必须采用多重分形分析这一工具(Geilirman *et al.*，1990)。Hirata 等(1991)研究了日本关东地震小地震震源的空间分布。他研究的地区是一个长方形的区域，范围是北纬 35°～37°，东经139°～141°，大约 40 000 km^2 大小的区域。研究了

震级 $M\geqslant 2.0$ 的 7013 次地震的震源分布。所用的方法是广义关联维方法。对于 N 个地震，首先定义局部密度函数 $C_i(\varepsilon)$

$$C_i(\varepsilon)=\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}\theta(\varepsilon-|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|)$$

这 $\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{x}_j$ 里分别代表地震的空间位置。上式给出了相距小于 ε 的地震对数目占总地震的比例。然后定义广义关联积分 $C_q(\varepsilon)$

$$C_q(\varepsilon)=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[C_i(\varepsilon)]^{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

当 $q=2$ 时，就是前面介绍过的关联维的计算参数，即

$$C_2(\varepsilon)\sim\varepsilon^{D_2}$$

将此公式推广，令

$$C_q(\varepsilon)\sim\varepsilon^{D_q}$$

就可以通过计算求出 D_q 来。

Hirata 发现，在 1.26～12.6 km 的范围内存在着分形现象，而且给出了如图 6.3 的 D_q 与 q 的关系曲线。$D_2=2.2\geqslant D_3\geqslant\cdots\geqslant D_\infty=1.7$。$D_\infty$ 是多重分形的下限，它相当于日本关东地区地震最密集的空间某些区域的现象。

1989 年，Mandelbrot 在“论地球物理学的多重分形测量”一文

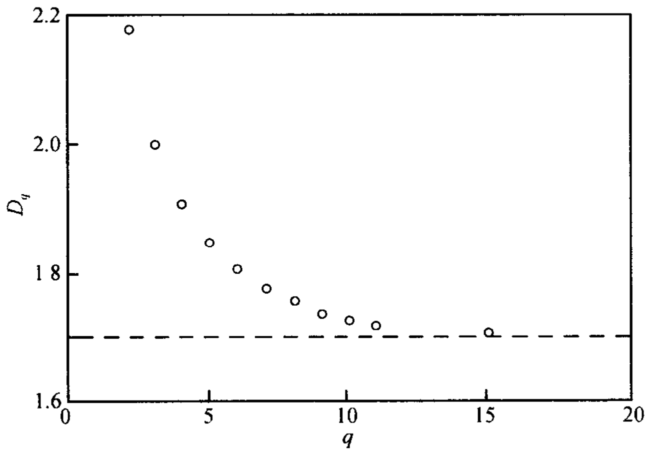


图 6.3　广义分维 D_q 与 q 的关系（根据 Hirata *et al.*，1991）
日本关东地区 1982 年 5 月至 1988 年 10 月，7013 次 2 级以上
地震震源空间分布的多重分析结果

中说到：多重分形的思想注定对地球物理学产生日渐增强的影响。从分形集合到多重分形测量的推广，涉及主要用数(如分维)表达的几何体向主要由函数表达的几何体之间的过渡；从有限数目分维数向无限数目分维数的过渡。

练　习　题

1. 阐述多重分形的定义和研究对象。指出描述多重分形特征的两套语言及其相互联系。

2. 证明式(6.7)。

3. 证明，对于 Cantor 集合，Koch 曲线等简单数学分形：

$$D_{-\infty}=\cdots=D_0=\cdots=D_{+\infty}$$

4. 图6.4 是一个电阻网络，它是这样来生成的：开始时是一根均匀电阻棒，当有电流通过时两端的电位差为 1，然后将棒一分为三等份，把中间的一段用一个闭合回路代替，这就是一次迭代操作。作迭代 R 次后就可以形成一个具有自相似特点的电阻网结构。

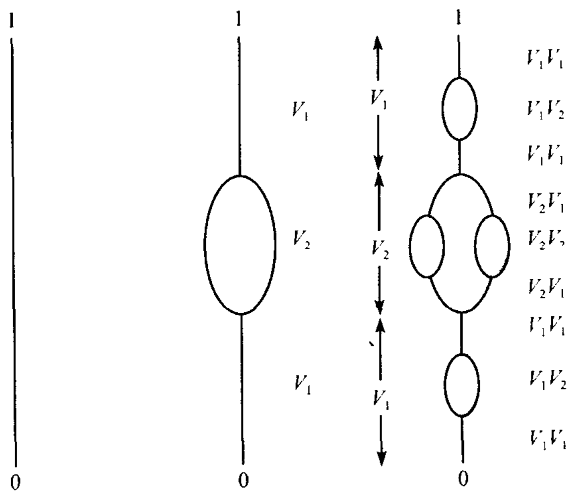


图 6.4　电阻网络——多重分形结构示意图

当电流在网络上流动时，在两种结构上的电位差会发生差异，直线段上的电位差 $V_1=2/5$，而在闭合回路上的电位差$V_2=1/5$。无穷迭代后生成了一个多重分形，证明对于这种多重分形：

$$\tau(q)=\frac{\ln(2V_1^q+2V_2^q)}{\ln 2}$$

第七章　时间记录分析和 *R/S* 方法

本书前六章，介绍了分形几何的基础。本书的后面几章则主要介绍由分形几何所派生出来的基本概念、统计分析方法以及计算和实现方法。在本书中，不准备介绍分形几何在各学科中的具体应用，有两个原因：第一个原因是各学科中具体的内容，显然在这本小册子中无法涉及到那么多细节，即使是提供可能多的学科背景与知识，也会冲淡分形几何的内容；第二个原因是分形几何的应用目前是各类学科的热门话题，每年都有许多专门讨论分形几何的学术会议文集及专著出版(Avnir，1989；Barnsley，1988；Devaney，1990；Crilly *et al.*，1991；李后强等，1990；刘式达等，1993；高安秀树，1989；陈颙等，1989；陈颙等，1992)。读者掌握了分形几何的基础，就不难理解这些论文集和专著。因此，本书之重点还在于强调分形几何中的基本概念，为读者接近这些应用专著提供基础知识和背景。所以，在第七章，介绍由自仿射分形而衍生出来的时间记录分析，着重介绍 *R/S* 方法。第八章，以地震研究为例，说明在应用分形几何知识处理实际地震资料时，发展的考虑集合各元素大小的一种物理分形的分析方法。第九章则介绍分形研究中的计算机技术。

本章从时间记录分析开始。许多自然现象的观测都表现为时间过程中的一系列记录，如温度、河流的流量、降水量等随时间的变化。本章讨论的第一个问题，就是研究在这些时间记录中是否存在着某些统计规律，我们有没有可能从短期观测去预测“十年一遇的洪水”或“百年一遇的洪水”这种长期现象。第一节主要介绍 Hurrst 在研究时间记录方面所得到的经验关系。第二节讨论的是，假定在一个自然现象的背后，是完全的随机过程在起作用，某一时刻发生的现象与其前一时刻毫无关系，在这种完全独立的随机假定

下，推导出来的时间记录的一般特征。第三节讨论假定在随机过程起主导作用前提下，加入了一些非随机过程，这时，自然现象的时间记录又有什么特征呢？最后两节通过两个例子来说明记录分析的应用。

多数的时间记录都可以用 R/S 方法进行分析，R/S 方法是 Hurst 于 1965 年首先提出来的(Hurst 等，1965)，其全名为“改变尺度范围的分析”(Rescale Range Analysis)，它的基本思想是，改变所研究的时间尺度的大小，研究其统计特性变化的规律，从而可以将小时间尺度范围的规律用于大的时间尺度范围，或者将大的时间尺度得到的规律用于小尺度。这种整体和部分之间规律的相似性，正是分形几何的核心思想，因此，R/S 分析也与分形几何有着密切的关系。

7.1 Hurst 的经验关系和 R/S 方法的提出

英国水文学家 Hurst 终生都在研究尼罗河，继 1952 年写了《尼罗河》专著后，1965 年又发表了《长期蓄水——尼罗河实验研究》一书。在这本书中他提出了“改变 时间尺度分析的新方法”，人们后来称之为 R/S 方法。

尼罗河的水主要来源于非洲中部的阿伯特(Albert)湖，图 7.1 给

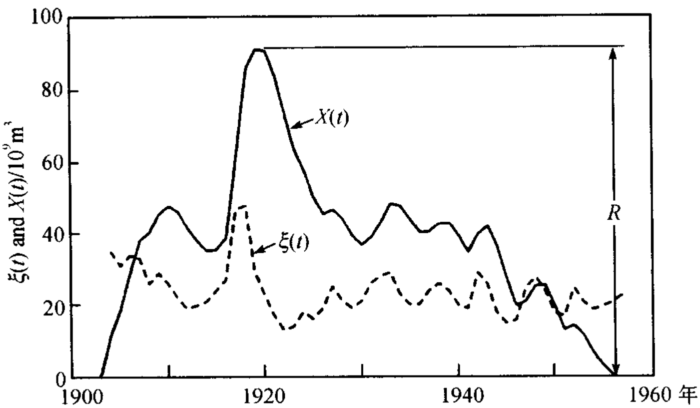


图 7.1　阿伯特湖每年向尼罗河排放水的规律

虚线是阿伯特湖每年的泻水量 $\xi(t)$；当设计中水库每年以 $\langle\xi\rangle_\tau$ 向下游排水，水库中的累积蓄水量 $X(t)$ 如图中实线表示；水库中蓄水量的变化范围为 R(根据 Hurst，1965)

出了该湖每年向尼罗河排放的水量 $\xi(t)$。现在要在该湖下方的尼罗河上修建一个水库，应该如何根据观测的湖水泻流量来设计这个水库的库容量？

对于给定的 t 年，设计中的水库接收上游阿伯特湖的进水流量是 $\xi(t)$，显然 $\{\xi(t)\}$ 是一个随机的时间记录系列，该水库向下游排水量的年平均值 $\langle\xi\rangle_\tau$ 是：

$$\langle\xi\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\xi(t) \tag{7.1}$$

公式(7.1)表示在尺度范围为 τ 的整个时间段，由上游接收的水量 $\sum_{t=1}^{\tau}\xi(t)$ 等于向下游排出的水量 $\tau\langle\xi\rangle_\tau$。现在的问题是，若水库每年以平均排水量 $\langle\xi\rangle_\tau$ 向下游排水，水库设计库容应多大。显然，水库每年进水量 $\xi(t)$ 不是固定的，有时多，有时少。库容设计得太小，遇到进水多的年份，水库容纳不下，会出现水从水库坝顶流出来的现象，这是不允许的，因此，库容不能设计得太小。但库容设计过大，又会造成浪费投资。所以，合理地设计库容是十分重要的事情。我们用 $X(t)$ 记 t 年份进水量 $\xi(t)$ 与平均排水量 $\langle\xi\rangle_\tau$ 的累积离差：

$$X(t,\tau) = \sum_{u=1}^{t}\{\xi(u) - \langle\xi\rangle_\tau\} \tag{7.2}$$

累积离差 $X(t)$ 随时间变化的情况在图 7.1 中用实线表示。$X(t)$ 的极大值与极小值之差叫做极差，图 7.1 中用字母 R 表示(图 7.1)。显然，对于一段时间来说，要维持平均排水量不变，极差 R 是水库应该具有的(动态)库容量。R 表示了水库最大蓄水量与最小蓄水量之差：

$$R(\tau) = \max_{1\leqslant t\leqslant\tau} X(t,\tau) - \min_{1\leqslant t\leqslant\tau} X(t,\tau) \tag{7.3}$$

式中，t 是离散的年份；τ 为所研究的水库使用期的总长度。以上介绍的各种关系在图 7.2 中清楚地表示了出来。

十分明显，水库库容的设计是与水库使用的期限 τ 有关的，使用的时间 τ 越长，水库的库容设计就越大(对于一个使用十年的水库，只需要考虑十年一遇的洪水；而使用百年的水库，则为必须考虑百年一遇的洪水，所以后者库容设计一定会比前者要大)。正是因为这样，我们可以由图 7.1 的资料，求出 1904～1957 年的 53 年期间

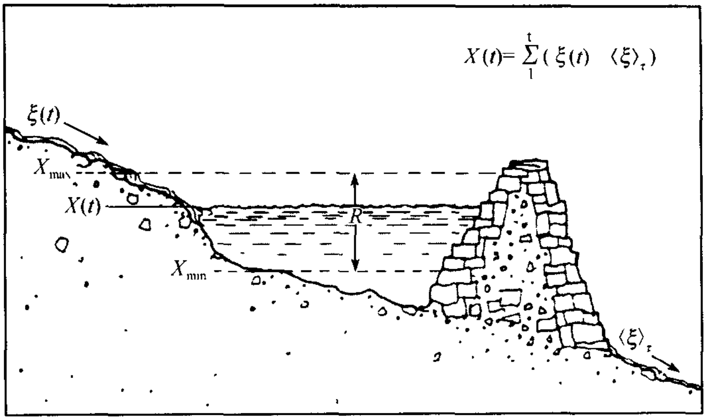


图 7.2　合理地设计水库容量的示意图

$\xi(t)$为第 t 年的进水量；$\langle\xi\rangle_{\tau}$ 为 τ 年内每年的平均排水量；$X(t)$为累积库中水量；$R(\tau)$为 τ 年中最大最小蓄水量之差，即为水库的(动态)库容量

的极差，

$$R(53)=91\times10^{9}\ \mathrm{m}^{3}$$

而由图 7.3 的资料，求出 1904～1934 年的 30 年期间

$$R(30)=73\times10^{9}\ \mathrm{m}^{3}$$

Hurst 使用了一个无量纲的参数，R/S 来研究这些数据中的统计规

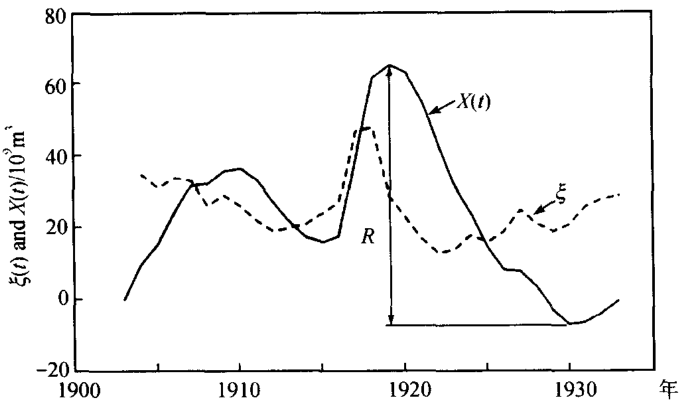


图 7.3　阿伯特湖 1904～1934 年间的排水量 $\xi(t)$和设计中水库的累积蓄水量 $X(t)$以及库容范围 R(根据 Hurst，1965)

律性，这里 S 是 $\xi(t)$ 的均方差：

$$S = \left(\frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\{\xi(t) - \langle\xi\rangle_\tau\}^2\right)^{1/2} \tag{7.4}$$

从尼罗河的实际观测资料，Hurst 发现

$$R/S \sim (\tau)^H \tag{7.5}$$

式中 H 是一个位于[0，1]区间的常数。

不仅研究罗尼河，Hurst 还研究了许多诸如河流的流量、泥浆的沉积和树木生成的年轮等自然现象。以树木年轮为例，假定在果园中有许许多多棵苹果树，如果用 $\xi(t)$ 表示一棵树第 t 年的年轮在树木直径方面的长度，则对于 τ 年期间：

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \max_{1\leqslant t\leqslant \tau} X(t, \tau) - \min_{1\leqslant t\leqslant \tau} X(t, \tau) \\ &= \max\left[\sum_{u=1}^{\tau}\xi(u)\right] - \min\left[\sum_{u=1}^{\tau}\xi(u)\right] \end{aligned}$$

即 $R(\tau)$ 代表了经过 τ 年生长后，苹果园中最粗的树与最细的树在直径方面的差别，Hurst 系统地搜集了各种各样自然现象的观测数据，列于表 7.1 之中，图 7.4 给出了这些现象的 R/S 与 τ 的关系图，Hurst 发现，对于这样众多的自然现象，都有

$$R/S \sim (\tau)^H$$

$$H \approx 0.72$$

表 7.1　各种自然现象的 R/S 与 $(\tau)^H$ 的关系

自然现象	时间尺度 τ/a	现象数目	H 值	标准均方差
河水流量	10～100	39	0.72	0.09
河湖水位	44～176	4	0.71	0.08
降雨量	24～211	39	0.70	0.09
泥浆沉积	50～2000	1	0.69	0.06
温度	29～60	18	0.68	0.09
压力	29～96	8	0.63	0.07
日斑指数	38～190	1	0.75	0.06
树木年轮	50～900	5	0.80	0.08
平均	10～2000	120	0.726	0.082

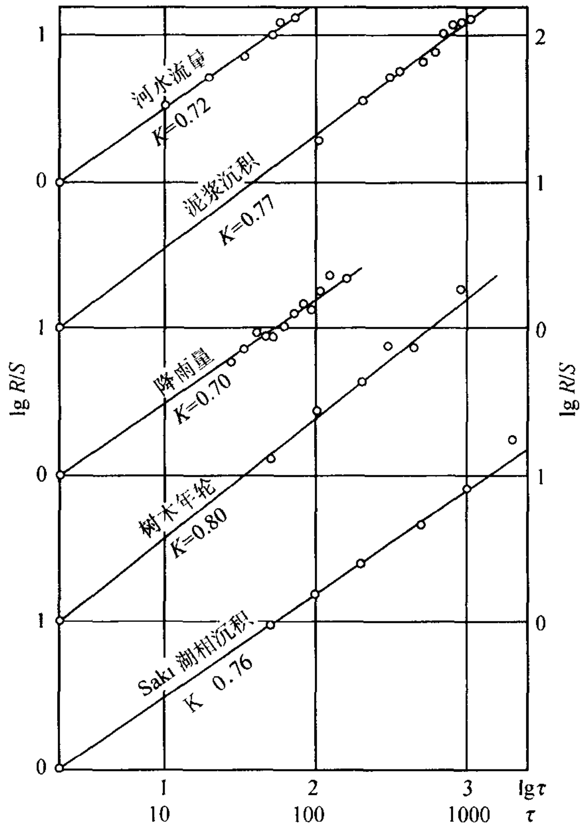


图 7.4　各种自然现象的 R/S 分析(根据 Hurst，1965)

在 Hurst 研究的基础上，后来人们把这一套方法概括如下：

考虑一个时间记录

$$\{\xi(t)\},\ t=1,\ 2,\ \cdots$$

对于任何正整数 τ，定义均值系列

$$\langle\xi\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\xi(t)$$

用 $X(t)$ 表示累积离差

$$X(t,\ \tau) = \sum_{u=1}^{t}\{\xi(u) - \langle\xi\rangle_\tau\},\qquad 1\leqslant t\leqslant\tau$$

极差 R 的定义为

$$R(\tau)=\max_{1\leqslant t\leqslant\tau} X(t,\ \tau)-\min_{1\leqslant t\leqslant\tau} X(t,\ \tau)$$

均方差 S 的定义

$$S(\tau)=\left(\frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\{\xi(t)-\langle\xi\rangle_{\tau}\}^{2}\right)^{1/2}$$

Hurst 的经验关系式为

$$R/S\sim(\tau)^{H}$$

$$0\leqslant H\leqslant 1$$

这个经验关系可以用来将不同时间尺度范围 τ 的观测结果联系起来，提供了从小(大)尺度观测现象外推大(小)尺度规律的可能性，在时间记录分析方面得到了广泛的应用。

7.2 随机时间记录的模拟

为什么会有 Hurst 经验关系？我们现在来研究这个问题。首先研究一个极端的例子，一个完全随机的时间记录，即某一时刻的时间记录的取值和其他时刻的取值完全无关。研究的方法首先是实验的方法，我们先人为地制造一个随机的时间记录。

取一把硬币，例如取 10 枚硬币，每抛一次这 10 枚硬币，我们就可以得到一个随机数 ξ，它是这样定义的：

ξ =(国徽向上的硬币数)－(国徽向下的硬币数)

不断地抛硬币做实验，依次可以得到 ξ_1，ξ_2，…，$\{\xi_t\}$就构造了一个随机的时间记录。

图 7.5 给出了对于 10 枚硬币一组，最初 2 500 组抛硬币实验的结果。在 Hurst 做实验的 20 世纪 60 年代，做 100 组实验要花近 1 个小时的时间，而现用计算机进行这种“数学”实验，连 1 s 都用不了。图 7.5(a) 给出了 2 500 组实验的随机数 ξ 的值，从图 7.5(a)可以看出，ξ 值在±0 附近取值多，而在离 0 远的地方取值少，有些正态分布的样子，但 ξ 值的分布是非常混乱的，第一组实验结果完全与第二组实验无关。ξ 值的记录看起来像是噪声的记录。按式(7.2)，我们可求出累积离差 $X(t)$：

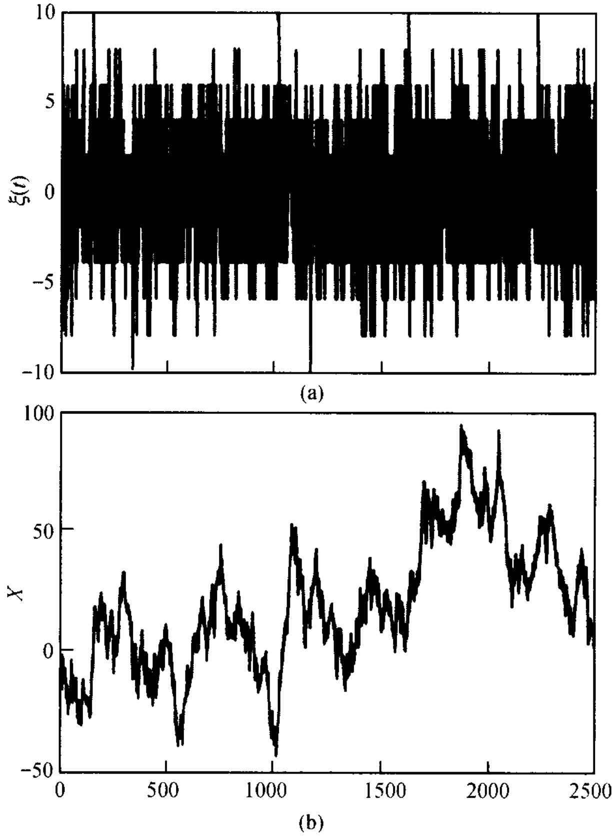


图 7.5 抛 10 枚硬币得到一个随机时间记录

(a) 10 枚硬币为一组，执硬币 2 500 组实验得到的独立随机变量 $\xi(t)$ 的时间序列记录；(b) 取 $\xi(t)$ 数学均值为零时的累积离差 $X(t)=\sum_{u=1}^{t}\xi_u$ 随时间的变化

$$X(t)=\sum_{u=1}^{t}\{\xi_u-\langle\xi\rangle_\tau\}$$

其中 $\langle\xi\rangle_\tau$ 是 τ 组实验求出来 ξ_t 的数学期望值

$$\langle\xi\rangle_\tau=\frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\xi_t$$

图 7.5(b)给出了累积离差 $X(t)$ 随时间的变化。

对于这个人造的随机时间记录，可以用本章第 1 节的方法进行 R/S 分析，图 7.6 给出了 50 000 次抛硬币实验记录的分析结果。

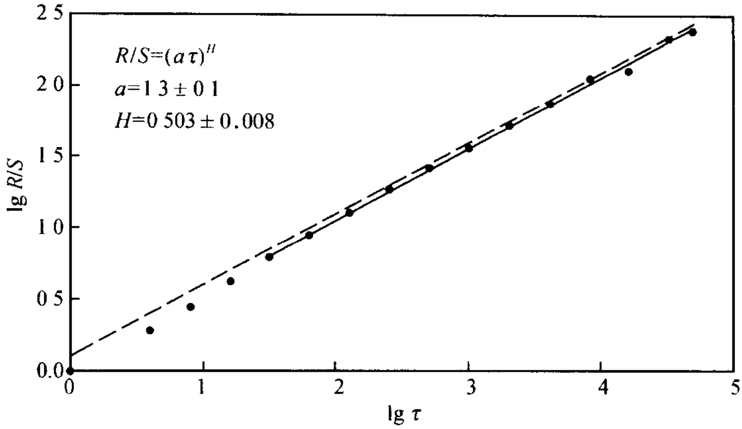


图 7.6

取 10 枚硬币为一组做硬币实验，国徽向上的硬币数与国徽向下的硬币数之差，定义了随机数 $\xi(t)$。抛硬币实验进行了 50 000 组，就得到了一个人造的随机时间记录，按照公式(7.1)～(7.4)对这个记录进行 R/S 分析，结果用图中黑点表示，图中的虚线代表$R/S\approx\tau^{1/2}$的结果

Hurst 称实验的次数 τ 为 lag。先分析 $\tau=50\,000$ 的实验结果，得到一个 R/S 值，然后取 $\tau=25\,000$，又得到另一个 R/S 值，依次类推，可以得到许多 R/S 值。在 $\lg(R/S)$和 $\lg\tau$ 的双对数坐标中，它们有着直线的关系：

$$R/S=(a\tau)^H$$

由直线的斜率可以得到

$$H=0.5$$

以上是实验的结果。对这个人造的随机时间记录，也可以从理论上进行分析。抛 n 枚硬币，其中有 k 枚国徽向上的概率是

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n(n!/k!(n-k)!)$$

当实验次数 τ 比 k 大许多时，ξ 的取值将遵循二项式分布，或者说，在 τ 和 n 足够大的情况下，ξ 的分布是高斯分布，对于这样的情况，可以证明(Hurst，1951)：这种时间记录的极差

$$R=\sqrt{\frac{\pi}{2}n\tau}-1$$

由于国徽向上与国徽向下硬币数之差的标准方差是 k 的标准方差的两倍，所以，ξ 时间记录的均方差 S 为

$$S=\sqrt{n}$$

由上面的两式，不难看出：

$$R/S\approx\left(\frac{\pi}{2}\cdot\tau\right)^{H}$$

而且

$$H=1/2$$

关于这种人造的完全随机的时间记录，有两点是应该指出的：第一，R/S 与$(\tau)^H$ 成正比的关系，只有在 τ 足够大的情况下才成立。从图 7.6 的实验分析数据可以看出，当 $\tau>30$ 时，实验分析结果才较好地落在 $R/S\sim(\tau)^{1/2}$的直线上。因此，足够多的数据是对 R/S 分析方法的必须的要求；第二，不论是实验分析，还是理论分析，都得到了这样的结果：对于一个完全随机的时间记录，即每一时刻该时间过程的记录值都与其他时刻的记录值完全无关，它一定存在以下关系

$$R/S\sim(\tau)^{H}$$

$$H=1/2$$

上述关系的存在，与该时间记录的具体内容无关。因此，这样的结果，代表了广泛的一类自然现象，只要知道了其独立的随机性质，我们就可以对其长时间的统计特征(τ 足够大)做出估计，这在实际应用中具有广泛的意义，而且，如果我们把 R/S 的取值作为一个时间记录的统计特征，上述两式表明，该时间记录具有分形特征，它是一个自仿射分形，而且 $H=1/2$。

7.3　有长期依存性的随机记录的模拟

上一节在完全随机时间记录的模拟中，介绍了生成时间记录的过程是完全独立的情况，即每一步的记录生成，都与其他步的记录生成无关，并且得到了对于这种完全独立的随机时间记录

$$H=0.5$$

但是由本章第一节中所介绍的实际观测资料，得到

$$H=0.72$$

这种差别由何而来呢？

Hurst 是一位喜欢动手做实验的人，他用 52 张扑克牌来进行随机现象的数学实验，他制作了一副独特的扑克牌，一共有 52 张，其中

−1	13 张
+1	13 张
−3	8 张
+3	8 张
−5	4 张
+5	4 张
−7	1 张
+7	1 张

实际上，读者不难看出，扑克牌的取值(如＋1，－3 等)与扑克牌出现的频率(即同一取值扑克牌的张数)是近似地遵从高斯正态分布的。Hurst 先玩第一个游戏：洗牌，然后随意地取出一张，把它的点数取作 $\xi(1)$。然后再重新洗牌，再随意地取出一张，作为 $\xi(2)$，依此类推。这种玩法的最大特点是上一次取值与下一次取值，完全是独立的，通过这种游戏得到的时间记录 $\xi(1)$，$\xi(2)$，…是完全随机的时间记录，遵照上一节的介绍，显然有

$$H=1/2$$

Hurst 又设计了第二种扑克牌游戏：还是用刚才设计的那副扑克牌，不过加了一张牌“停止”，把这 53 张扑克牌分成两半(张数不必严格相等)，首先从左手牌中随意取出一张，例如是＋3，取 $\xi(1)=+3$，并从左手牌中挑三张牌点最高的牌放至右手那叠牌中，同时去掉右手牌中三张牌点最小的牌。接着，从右手牌中任意翻出一张，例如－1，令 $\xi(2)=-1$，并从左手牌挑一张牌点最小的牌给右手，同时去掉右手中牌点最大的一张牌，不断进行下去，直到出现“停止”牌为止。然后，再对 53 张牌重新洗牌，重头开始游戏，并不断地记录每次翻出的扑克牌的牌点，作为随机时间记录的取值。

Hurst 第二种游戏尽管取出一张扑克牌并记录牌点是随机的，但它的最大特点是：第一次翻牌的结果(两手交换牌并去掉几张牌)对第二次翻牌的结果是有影响的，因而这种随机记录是有偏的(biased)。图 7.7(a)给出一共记录了 2 500 个时间记录的游戏结果，通过这 2500 个 $\xi(t)$而得到的累积离差如图 7.7(b)所示。我们可以对比一下完全独立的随机实验结果图 7.5 与有偏的随机实验结果图 7.7，

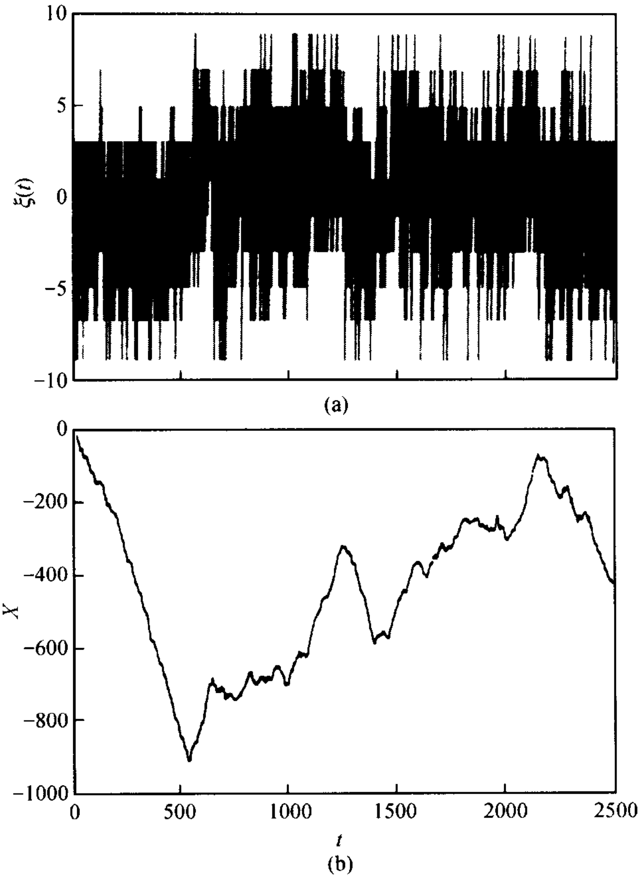


图 7.7 用扑克牌进行的随机数学实验

(a) 用第 2 种游戏方法得到的有偏的随机数 $\xi(t)$；(b) 由 2 500 个 $\xi(t)$得到的累积离差 $X(t)=\sum_{u=1}^{t}\xi(u)$

发现两者有很大的不同：图 7.7(b)所示的累积离差 $X(t)=\sum_{u=1}^{t}\xi(u)$ 在纵坐标上的涨落范围比图 7.5(b)要大得多，而且其形状也比图 7.5(b)要光滑，似乎有较小的噪音；而最大的不同是，有偏随机实验得到的 H 值不是 1/2，在图 7.7 所示的实验中，$H=0.71$。

完全随机的和完全确定的规律是自然现象的两个极端，在多数的自然现象中确定性规律和随机性两者并存，而 $H\neq 1/2$ 正是这种两种规律并存的统计反映。上面举的第二种游戏的规律决定了 $X(t)$ 向负值方向偏离，导致 $H=0.71$ 的结果。如果我们改变一下游戏规律中确定性规则的内容，则可能会导致 $H<1/2$ 的结果。然而不管游戏中确定性规律内容如何，H 值偏离 1/2 的大小反映了有确定性规律所占比重及其具体的内容。

Hurst 的第二种数学游戏后经许多人的发展，可以用蒙特卡洛(Monte Carlo)方法来模拟。当 $\tau>\tau_{\min}$ 时，模拟的结果能够很好地满足 Hurst 的经验定律(在图 7.7 中，$\tau_{\min}$ 大约为 20 左右)。

7.4 布朗运动和 R/S 分析

布朗运动是研究随机现象统计规律的一个很好的模型。我们从一维布朗运动的研究开始，探索布朗运动和 R/S 分析之间的关系。

第四章 4.4 节介绍了一维布朗运动的随机行走模型：向西移动一步(步长为 τ)并抛一次硬币，若国徽向上则向左(南)跨一步(固定步长)，否则向右(北)跨一步。这样就得到了一维布朗运动的一条曲线，其横轴代表向西的距离，而纵轴代表了南北方向距离原点的长度。本节中，我们对 4.4 节的随机行走模型作进一步的发展。假定我们考虑一个布朗粒子沿 x 轴的运动，每行走一个步长 τ(τ 可以看成是时间或其他任何变量)后，再随机地沿 y 轴方向跳跃一个步长 ξ，这时粒子离 x 轴的距离就成为 ξ 或 $-\xi$。与第四章不同的是，跳跃步长不再是固定的常量，而是由高斯或正态分布所描述的变量：

$$P(\xi,\ \tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4D\tau}\right) \tag{7.6}$$

式(7.6)表明了跳跃步长 ξ 落在(ξ, $\xi+\mathrm{d}\xi$)之间的概率。这样，每走一步，都可以得到一个跳跃步长 ξ_i，而它们的集合$\{\xi_i\}$就组成了一个独立的高斯型随机变量。根据式(7.6)，不难算出随机变量$\{\xi_i\}$的数学期望值$\langle\xi\rangle$和方差 $\langle\xi^2\rangle$ *：

$$\langle\xi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi P(\xi, \tau)\mathrm{d}\xi = 0$$

$$\langle\xi^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi P(\xi, \tau)\mathrm{d}\xi = 2D\tau$$

常数 D 叫做扩散系数。当我们用$\frac{\xi}{\sqrt{2D\tau}}$作为新的随机变量 ξ 时，就完成了归一化的过程。新的参数 ξ 是归一化的高斯型随机变量，它的数学期望值和方差有着极其简单的形式：

$$\langle\xi\rangle=0$$

$$\langle\xi^2\rangle=1$$

一维随机行走时，每次跳跃步长 ξ_1，ξ_2，ξ_3，…构成了一个随机时间记录。在 $t=n\tau$ 时刻，布朗粒子距坐标轴的距离 $X(t)$为：

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

实际上，一维行走布朗运动是一些点的集合，如果让时间步长 τ 无限小，则表示粒子位置的随机变量 $X(t)$就变成了一个随机函数，$X(t)$在 X-t 坐标中就描绘了一条连续曲线，代表布朗粒子的轨迹。Mandelbrot 称之为布朗函数，用 $B(t)$表示。

下面推导这种一维随机行走生成的布朗函数 $B(t)$的统计性质，推导过程虽不需要高深的数学，但也要有很长一段的数学运算，没有兴趣的读者可以略过这些运算。

布朗运动具有无穷的层次结构，我们不可能以无限分辨率去观测布朗运动。假定第一次观测时的精度是 τ，第二次观测时的观测精度是 2τ(它是一般情况 τ 中的一个特例)。在第二种情况下，2τ 之内

---

* 符号$\langle\xi\rangle$表示对随机变量 ξ 求其数学期望值。

发生的步长ξ是由两部分组成的：$0\to\tau$时间内的跳跃ξ'和$\tau\to2\tau$时间内的跳跃ξ''。这时，第一次跳跃为$[\xi', \xi'+d\xi')$，第二次跳跃为$[\xi'',\xi''+d\xi'')$的共同发生概率$P(\xi', \xi'', \tau)$是

$$P(\xi', \xi'', \tau)=P(\xi', \tau)\cdot P(\xi'', \tau)$$

于是，在2τ时间间隔中跳跃步长为ξ的概率是

$$P(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' P(\xi-\xi', \tau)P(\xi', \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D2\tau}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4D2\tau}\right)$$

同样的方法，当分辨率变成$b\tau$时，粒子位置在$(\xi, \xi+d\xi)$的概率为

$$P(\xi, b\tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Db\tau}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4Db\tau}\right)$$

我们研究$t-t_0$时间内粒子位置的变化$X(t)-X(t_0)$，由布朗运动的时间无关性，按上面的方法同样可得

$$P(X(t)-x(t_0))=\frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}}\exp\left(\frac{[X(t)-X(t_0)]^2}{4D(t-t_0)}\right)$$

显然，$X(t)$满足下面的标度关系：

$$P(b^{1/2}[X(t)-X(bt_0)])=b^{-1/2}P(X(t)-X(t_0))$$

$X(t)-X(t_0)$的均值和方差可以很容易地计算出来：

$$\langle X(t)-X(t_0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X P(\Delta X, t-t_0)\, d\Delta x = 0$$

$$\langle [X(t)-X(t_0)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t-t_0) d\Delta x = 2D\,|\,t-t_0\,|$$

式中$X(t_0)$是在参考时间t_0的粒子位置，ΔX是粒子位置的变化增量：

$$\Delta X=X(t)-X(t_0)$$

以上，通过一系列的推导，我们利用随机行走的基本公式(7.6)和布朗运动本身包括的无限层次运动相似性的概念，推导出了布朗运动的基本统计规律。

Wiener(1923)给出了另外一种表达式。假定我们有一个由式(7.6)规定的归一化的高斯随机过程$\{\xi\}$，倘若有一个函数$X(t)$满足以下条件：

$$X(t)-X(t_0)\sim\varepsilon|t-t_0|^H \tag{7.7}$$

则称 $X(t)$的连续函数形式就是布朗函数。上面举的例子都是$H=1/2$的情况。Wiener 的定义很容易推广到的 $H\neq1/2$ 的情况。如果有一函数 $B_H(t)$满足式(7.7)的条件，而且 $0<H<1$，这时 $B_H(t)$叫做分数布朗运动。不难求出：

$$\langle B_H(t)-B_H(t_0)\rangle=0$$

$$\langle B_H(t)-B_H(t_0)^2\rangle=2D\tau(|(t-t_0)/\tau|^{2H})\sim|t-t_0|^{2H}$$

分数布朗运动最先是 Mandelbrot 提出来的(Mandelbrot and Van Ness，1968)，它作为一个随机函数，最大的特点在于它有长程相关性，也就是说，这个函数过去的变化与未来的变化有着统计上的联系。为此，我们考虑从$-t$ 到 0 期间分数布朗运动

$$B_H(0)-B_H(-t)$$

和从 0 至 t 期间分数布朗运动

$$B_H(t)-B_H(0)$$

的时间相关性。不失一般性，可以取 $B_H(0)=0$。这时过去函数变化与未来函数变化的时间相关函数 $C(t)$为

$$C(t)=\frac{\langle -B_H(-t)B_H(t)\rangle}{\langle B_H(t)^2\rangle}=2^{2H-1}-1$$

由上式可以看出，当 $H=1/2$ 时，$C(t)=0$，即过去的增量与未来的增量不相关，此时正好是通常的布朗运动，实际它是具有独立增量的随机过程，而当 $H\neq1/2$ 时，$C(t)\neq0$，这正是分数布朗运动的特征。

当 $H>1/2$ 时，$C(t)>0$，即未来的增量与过去的增量是正相关的，也就是说，若在过去某时有一个正的增量，那么在将来平均地说也有一个正的增量，这时我们就称该过程有持久性(persistence)。因此，用平均的观点看，过去的一个增量趋势意味着将来的一个增长趋势；反之，过去的一个减小趋势意味着将来的一个减小趋势。

当 $H<1/2$ 时，$C(t)<0$，即过去的增量与未来的增量是负相关的，这时称过程具有反持久性(antipersistence)。对这样的过程可推出与 $H>1/2$ 的完全相反的结论，如过去的增加趋势意味着未来的减小趋势。

Mandelbrot(1982)证明，对于分数布朗运动，极差 $R(\tau)$满足

$$R(\tau)\propto\tau^H$$

由于归一化的布朗函数，

$$S(\tau)\propto 1$$

因此可得

$$R/S \propto \tau^H$$

在第四章中我们曾经介绍分数布朗运动可以描述许多自然界的随机现象。而在本节中，我们又证明了分数布朗运动中的 H 就是 Hurst 指数，分数布朗运动一定满足 R/S 关系。

7.5 地震时间序列的 R/S 分析

这一节里，我们将把 R/S 分析方法应用在地震研究中，看看在 R/S 分析这把变尺度的"放大镜"下，由地震频度和地震发生时间间隔构成的时间序列究竟暗含了一种什么样的统计规律性，它们涨落的变化又能给我们带来什么样的启发。

1. 地震频度中的 R/S 关系

地震频度 $N(\geqslant M, T, t)$指某一地区在一定时间内发生地震的次数，它定量描述了该地区地震活动性的强弱，是进行地震危险性分析、合理科学开展工程设防的关键参数。地震频度的涨落直接体现了地震活动的活跃与平静的交替变化(茂木清夫，1984；傅征祥等，1986)。

统计地震频度时首先碰到的一个问题是时间窗的选取。为避免样本量过小和对信息的平滑，可以采用地震自然周期 t_m 为基本时间窗进行统计。自然周期 t_m 是指研究时段 τ 内，震级 M 以上地震的平均复发周期。这样，一共可得到 $N=\tau/t_m$ 个随机时间记录$\{\xi(n), n=1, 2, \cdots, N\}$，其中 $\xi(n)$为第 n 个自然周期内的地震数目。显然，它是一个随机时间变量，大多数情况下，$\xi(n)$应为 1，其次为 0，2，3，… 当地震相当密集时，$\xi(n)$的值会突然变得很大；当地震位于平静期时，$\xi(n)$会长时间表现为 0。$\xi(n)$的涨落反映出地震的非平稳性和丛集特性。

对得到的时间序列$\{\xi(n), n=1, 2, \cdots, N\}$，计算$\tau(\tau=N\cdot t_m)$时间内$\xi(n)$的平均值$E[\xi(n)]$和均方差$S$，

$$E[\xi(n)] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\xi(n) \tag{7.8}$$

$$S = \left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{\xi(n) - E[\xi(n)]\}^2\right\}^{1/2} \tag{7.9}$$

对于给定的时刻t（$t=k\cdot t_m$，$1\leqslant k\leqslant N$），计算累积离差$X(t, \tau)$：

$$X(t, \tau) = X(k, N) = \sum_{n=1}^{k}\{\xi(n) - E[\xi(n)]\} \tag{7.10}$$

容易看出，此刻的累积离差表示t时间内地震频度相对于均值的累积偏差。在某时刻t_1和t_2，累积离差必然会达到最大和最小值，也即地震频度相对于均值的累积偏差出现极大和极小情况。它们的差值即为地震频度时间序列中的极差$R(\tau)$，

$$R(\tau)=R(N)=\max_{1\leqslant k\leqslant N}X(k, N)-\min_{1\leqslant k\leqslant N}X(k, N) \tag{7.11}$$

极差$R(\tau)$定量表示了研究时间尺度$\tau=N\cdot t_m$内地震累积频度的最大涨落。

图 7.8 给出了土耳其地区 3 级以上和华北地区 2 级以上地震频度时间序列的R/S统计结果。为便于比较，图中还分别给出了采用其他几种统计时间窗（1，2，5，10 和 20 天）的结果。可以看出，不论地震频度统计时间窗怎样，在$\lg R/S$-$\lg n$双对数坐标中，数据点都很好地位于一条直线上，直线的斜率H分别为 0.827 和 0.721，这说明地震频度时间序列的极差和均方差之比与时间标度存在着指数关系式，且 Hurst 指数H都大于 0.5。

对于大空间尺度、高震级下限的地震频度时间序列，结果又如何呢？图 7.9 是全球尺度下地震频度时间序列R/S分析结果。从震级$M=4.5$级开始，以 0.5 级为步长，以自然周期为单位统计了不同震级下限的地震频度序列。随着震级不断增大，地震数目也在急剧减少，统计时将最小样本数目定为 300。

表 7.2 给出了中国及其邻近地区、中美洲、中国大陆、华北及土耳其地区地震频度时间序列R/S分析结果。可以看出，不论空间尺度、震级下限如何，地震频度时间序列都存在R/S经验关系，且 Hurst 指数H都大于 0.5。

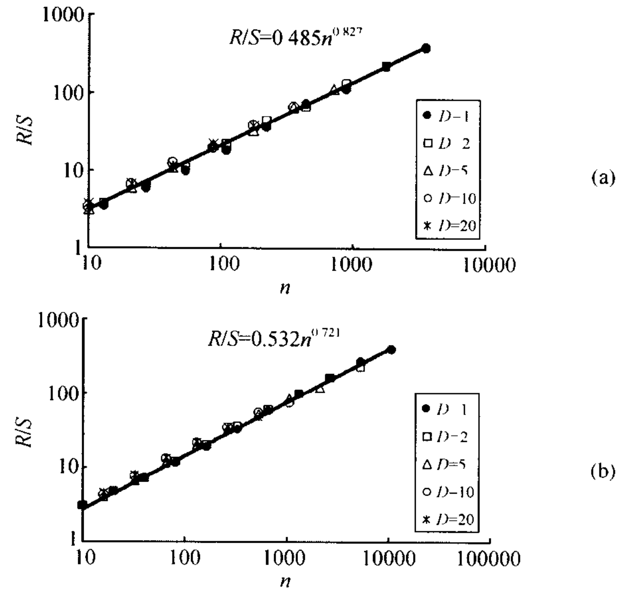


图 7.8　地震频度序列 R/S 分析结果

(a) 土耳其地区 3 级以上地震频度序列 R/S 分析结果；(b) 华北地区 2 级以上地震频度序列 R/S 分析结果，统计时间窗分别为 1，2，5，10，20 天

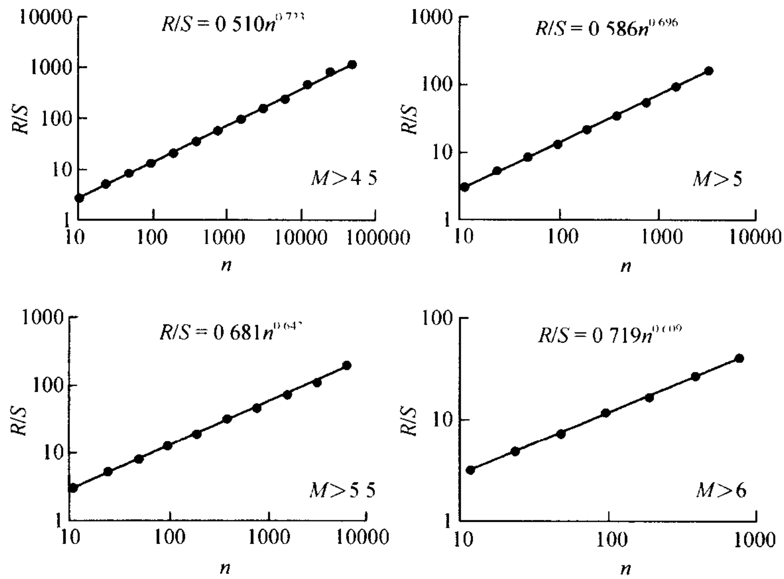
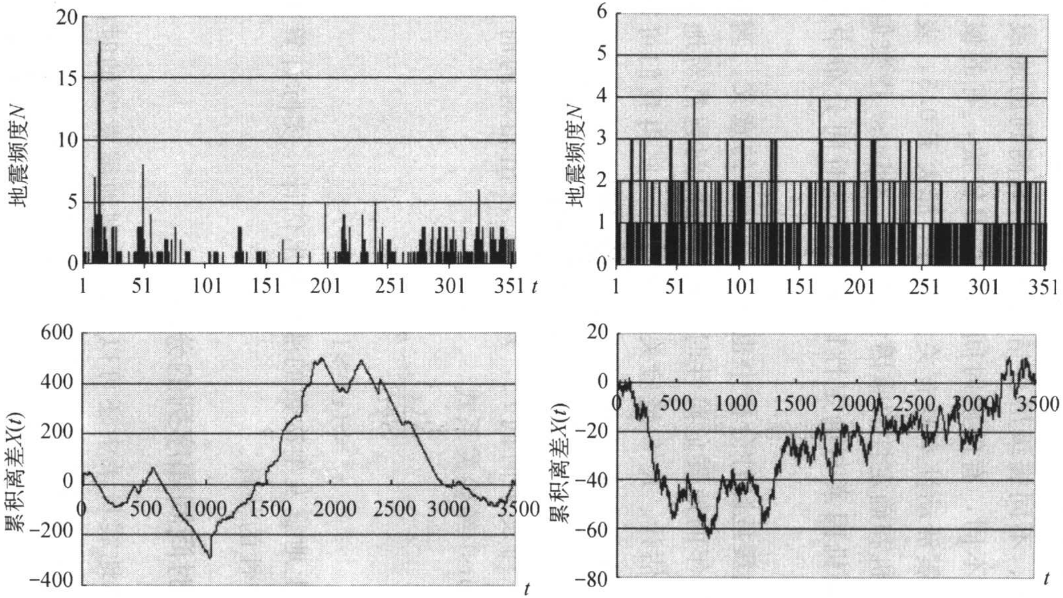


图 7.9　全球尺度下不同震级下限地震频度时间序列的 R/S 分析结果

表 7.2　不同空间范围内地震频度时间序列的 Hurst 指数值

地震目录		H
土耳其	$M>3$	0.827
	$M>4$	0.697
华北	$M>2$	0.721
	$M>3$	0.702
	$M>4$	0.688
中美洲	$M>4.5$	0.720
	$M>5$	0.632
中国及其邻近地区	$M>4.5$	0.721
	$M>5.0$	0.702
	$M>5.5$	0.688
中国大陆	$M>4.0$	0.723
	$M>5.0$	0.693
	$M>6.0$	0.670
全球	$M>4.5$	0.723
	$M>5.0$	0.696
	$M>5.5$	0.643
	$M>6.0$	0.609

在进行地震危险性分析时，通常都假定地震过程满足理想的泊松模型，即前后地震的发生相互独立，没有任何关系，这是一种极端随机的情况(Wei and Chen，2002)；在实际的预报工作中，往往又假定地震的发生并非完全随机，而是暗含一定的规律性。这一现象正是地震复杂性的体现。对于一个方差有限、完全独立的随机时间序列 $\xi(t)$，Hurst 和 Feller(Hurst，1951)证明了该序列的 Hurst 指数 $H=1/2$，也即理想、完全独立的随机时间序列 H 值为 0.5；对于一个完全规律的时间序列，如一组正弦信号，可以很容易发现它的 H 指数趋于 1。图 7.10 对比给出了华北地区 2 级以上地震时间序列和模拟生成的一组理想泊松分布时间序列的累计离差图。从图中可以看出，它们有很大的不同：图 7.10(a)所示的累积离差在纵坐标上的涨落范围比图 7.10(b)要大很多(几乎有一个数量级)，而且形状也比后者光滑，噪音较小；而最大的不同是前者得到的 Hurst 指数 H 不等于 0.5，而是 0.72，这正是地震现象中确定规律和随机性并存的统计反映。



(a) (b)

图7.10 地震频度与累积离差曲线图

(a) 华北地区2级以上地震频度与累积离差曲线；(b) 假设地震满足泊松公布($\lambda=1$)时的频度与累积离差曲线

从以上讨论可以看出，真实地震的发生并非是无“记忆”的泊松过程，毫无规律可循，相反，不同空间范围、不同震级情况下，地震频度时间序列都存在 R/S 关系。Hurst 指数偏离 0.5 的程度不同，表明不同地区、不同震级层次情况下可能观测到的地震频度数目的最大涨落程度不同，有的随时间 τ 变化得较快，有的慢些。这可能与局部地区地震活动性本身有关。但它们都大于 0.5，表明地震频度时间序列受随机和确定性双重因素的支配。Hurst 指数偏离 0.5 的程度可以衡量随机因素与确定性因素在地震时间分布中所占的比重。

极差 $R(\tau)$在地震危险性分析中也有十分重要的意义。当我们研究某一地区今后 T 年的地震危险性时，最关键的问题是对地震发生频度的确定性做出估计。R/S 经验关系的存在，使得我们可以通过时间尺度的变换，将小时间尺度下的极差推广到大时间尺度下，并利用极差对该地区将来地震频度的涨落给出最保守的估计。对 M 级地震可以计算出平均发生时间 t_m，然后由 t_m 求出相对的时间长度 $n=T/t_m$，利用 Hurst 经验关系式

$$\begin{gathered}\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\sim n^H \\ S(\tau)\approx 1\end{gathered} \tag{7.12}$$

对 T 年中 M 级以上地震发生次数的涨落做出估计，实际计算中可以取 $R/2$ 作为不确定性的估计。

2. 地震发生时间间隔序列的分析

从一个完整的地震目录中还可以直接得到地震发生的时间间隔序列，对地震时间间隔特性的研究对于理解地震发生的时间特性及中长期地震预报具有重要意义。对地震时间间隔序列的研究很多，像获原尊礼和力武常次等用 Weibull 分布来拟合大地震发生的时间间隔分布。这里，我们将把 R/S 方法应用在地震时间间隔的分析中。

由全球 4.5 级以上地震数据可以得到一组地震发生时间间隔随机序列 $\{\xi(i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$，$N$ 为研究时间段内总的地震数

目，i 是第 i 个地震。需要强调一点，所得到的序列并非真正意义上的“时间”序列，它不是以真实时间轴为变量，而是以每次地震事件的发生为变量，因此，这一组随机序列实际上是对时间的不等间隔采样得到的，随地震发生次序变化的随机序列。

图 7.11 给出了不同震级情况下，地震时间间隔序列的极差和均方差比值 R/S 随研究时间范围 τ 变化的曲线。在双对数坐标 $\lg R/S$-$\lg n$ 中，地震时间间隔序列经过 R/S 分析后的数据点很好地位于一条直线上，并且斜率 H 大于 0.5。

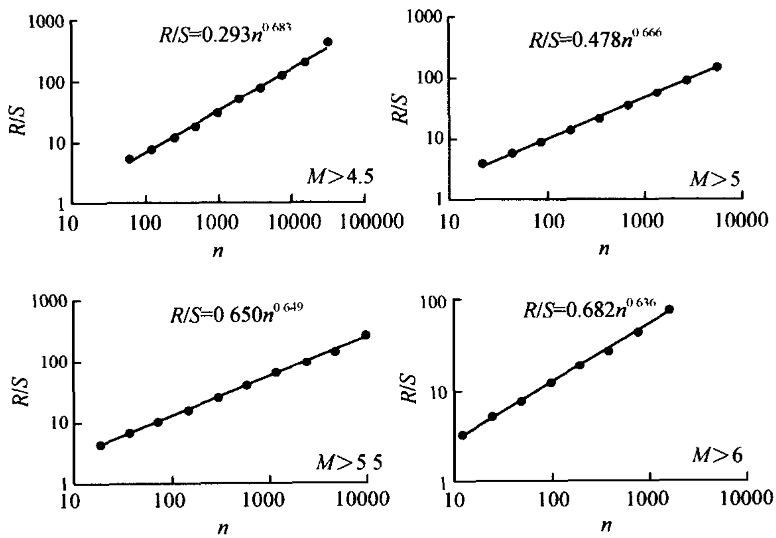


图 7.11　全球中强地震时间间隔序列 R/S 曲线

表 7.3 列出了全球、中国及其邻近地区、中美洲等地区 4.5 级以上地震时间间隔序列的 Hurst 指数。从中可以看出，在不同空间范围下，地震时间间隔序列中也存在着 R/S 经验关系，Hurst 指数 H 大于 0.5，表明地震的时间分布同样受随机和规律性双重因素的支配。这与由地震频度序列得出的结论一致。

Weibull 分布是研究产品寿命可靠性理论中的一个重要分布，常常被用来作为自然现象发生时间间隔的分布函数。对于地震发生时

表 7.3 不同空间尺度范围地震时间间隔序列 R/S 分析结果

地震资料(1964～1996)		Hurst 指数 H
全球	$M\geqslant 4.5$	0.683
	$M\geqslant 5.0$	0.666
	$M\geqslant 5.5$	0.649
	$M\geqslant 6.0$	0.636
中国及其邻近地区	$M\geqslant 4.5$	0.743
	$M\geqslant 5.0$	0.668
	$M\geqslant 5.5$	0.604
中美洲地区	$M\geqslant 4.5$	0.789
	$M\geqslant 5.0$	0.678

间间隔序列也不例外。松村正三(松村正三，1983)和王炜(王炜等，1987a，b)等分别研究了日本和中国华北地区小震时间间隔，认为它们都很好地服从如下所示的 Weibull 概率密度分布，

$$f(\tau)=\mu\tau^{\rho-1}\exp\left(\frac{\mu\tau^{\rho}}{\rho}\right) \tag{7.13}$$

式中，随机变量 τ 为相继发生的两个地震时间间隔；μ 和 ρ 分别称为形状参数和尺度参数。

图 7.12 是我们给出的 1997～1998 年中国华北 2 级以上小震时间间隔(以分钟为单位)的概率分布曲线，它极好地服从 $\rho<1$ 的 Weibull 分布。图 7.13 是对一组模拟生成的满足 $\rho=0.5$，$\mu=1$ 的 Weibull 分布的随机时间序列的 R/S 分析结果。

图 7.13 中 Hurst 指数 H 为 0.53，表明满足 Weibull 分布的时间序列也存在 R/S 经验关系，但与真实地震时间序列不同的是，H 值接近 0.5，表明这种时间序列和独立的泊松序列一样，完全是随机因素在起作用，事件发生前后不具有“记忆性”，彼此间相互独立。因此，尽管 Weibull 分布可以很好地描绘出地震时间间隔的整体分布情况，但却不能真正反映地震发生的前后相关性。

最后，我们将摆脱对 H 指数的注意，转回头去看看时间间隔间

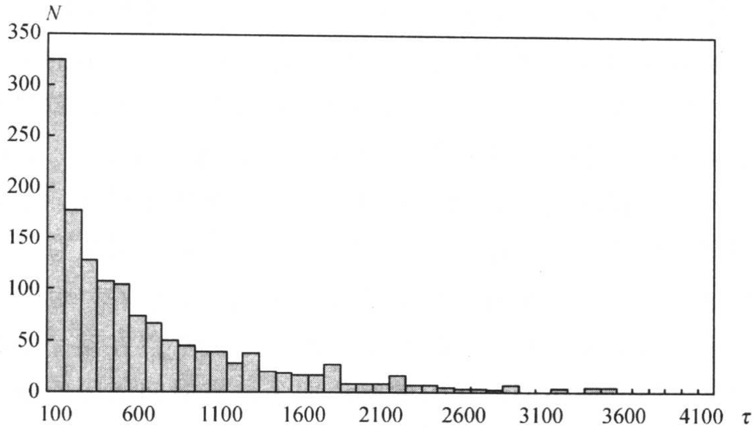


图 7.12　1997～1998 年华北地区 2.0 级地震时间间隔概率分布

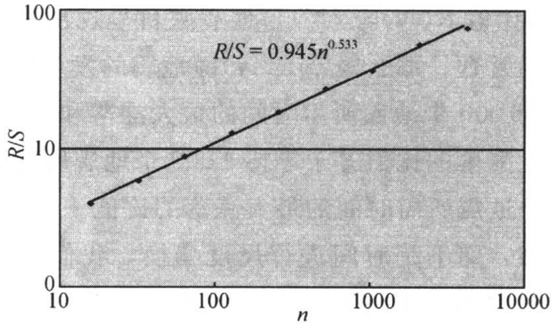


图 7.13　满足 Weibull 分布的时间序列 R/S 分析结果

题中极差 $R(N)$扮演的角色。这里用 $R(N)$取代了前文中的 $R(\tau)$是想强调地震时间间隔序列并非真正意义上的时间序列，而是以地震事件序号为变量的序列。

可以假定有某种理想的地震呈绝对周期性，地震的发生像发射脉冲波那样准确无误，当然这样的标准地震并不存在，实际情况比这复杂得多。在 R/S 分析中，我们把这种标准地震的重复周期取为 N 个实际地震的平均时间间隔 $\bar{\tau}$，也就是说标准地震每隔 $\bar{\tau}$ 时间就自觉地发生一个。当两个地震在时间上相距较近时，意味着第二个地震到来得比想像中要早些；若相距较长则意味着需要更耐心地等

待一阵才能“盼”来第二个地震。按地震发生顺序将每一次地震时间间隔与标准周期的差值累加起来，便得到了 R/S 分析中的关键量累积离差 $X(n, N)$，$X(n, N)$是指 n 个地震发生后总共所需要的时间与标准情况下所需时间的差值。若 $X(n, N)$远远大于 0，表明从总体上看这 n 个相继发生的地震来得比标准情况下要慢些，也即地震活动呈减弱趋势；反之若 $X(n, N)$远远小于 0，表明从总体上看这 n 个相继发生的地震来得比标准情况下更快、更早些，也即地震活动呈现出较强的丛集现象。累积离差 $X(n, N)$必然在某个地震发生以后达最大值或最小值，它们的差值即为地震时间间隔问题中的极差$R(N)$。可以看出，极差$R(N)$实际上意味着等待这 N 个地震全部发生所需时间的最大涨落。

由图 7.11 和表 7.3 可以看出地震时间间隔问题中极差 $R(N)$与均方差 $S(N)$的比值 $R(N)/S(N)$与地震数目呈现出幂指数关系。如果假定均方差为常数，那么极差 $R(N)$随地震的发生按幂律增长。也就是说，等待 10 000 个地震所需时间的最大涨落和等待 1 000 个地震所需时间的最大涨落的比值等于等待 1 000 个地震所需时间的最大涨落和等待 100 个地震所需时间的最大涨落的比值。

对地震个数，而不是时间进行尺度变换，我们就可以得到等待 m 个地震所需时间的最大涨落，若再除以地震个数 m，就可以估计出平均情况下等待一个地震可能需要时间的最大涨落情况。这在地震预报和地震危险性分析中具有十分重要的意义。

3. 海浪高度和地震年频度分析

下面举两个例子，说明 R/S 分析在分析时间记录方面的应用。

第一个例子是关于海浪分析。海洋中的波浪是海洋运动的一种形式。海浪不仅是一种惊心动魄的自然景观(像钱塘江大潮那样)，而且恶劣天气中的巨浪会造成人员伤亡和船只的沉没，所以对于海浪的研究成为减轻自然灾害的一个方面。现在，全球已建立了许多海浪观测台站，记录并分析研究海浪问题。

挪威的 Tromsoflaket 海浪观测站，每隔 3 小时，以每秒 2 个采样

点的速率共记录了2048次该站所在位置的海浪高度。这大概需要17分钟，然后从2048个海浪高度数据中挑出高度最大的1/3的数据(约683个)，求其平均值，记为h_s，我们称h_s为有效浪高。海浪分析中没有用最大海浪高度h_{max}，是因为海浪的观测是抽样进行的，h_{max}有可能出现在观测的时间之外。而取h_s作为海浪的高度一种稳健(robust)的估计。专门的研究表明，h_s和h_{max}之间存在着经验关系：

$$h_{max} \approx 1.8 h_s$$

所以，多数的海浪观测台站是对h_s进行观测和分析。

研究海浪高度的兴趣主要来自预测“百年一遇”的海浪高度，以保证航海的安全。我们能够通过分析有限(短)时间的观测资料来观测长时间中海浪的最大高度吗？在这里，我们再一次遇到了从短期(部分)观测推测长期(整体)行为的问题。显然，问题的关键在于利用海浪高度变化的统计特征，而幸运的是，这种特征是分形的。

图7.14给出了1980年每天在Tromsoflaket观测站上得到的有效浪高h_s，最大有效浪高h_s=10.7 m，而该年的真正的最大海浪高度h_{max}=19 m。从图7.14可以看出有效浪高在每个季节中是不同的。与季节变化有关的海浪高度变化，我们在本节中不予进行讨论。

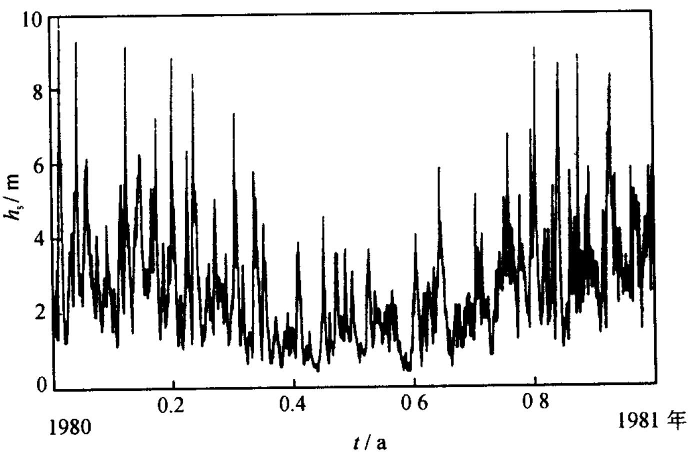


图7.14　1980年挪威的Tromsoflaket观测站记录的有效浪高h_s(引自Froyland *et al.*，1988)

依照前几节关于布朗运动的讨论，我们把海浪高度 $h_s(t)$看成是随机变量 $\xi(t)$，即

$$h_s(t) \to \xi(t)$$

然后沿用上几节介绍的 R/S 分析方法，我们得到(图 7.15)：

$$R(\tau)/S \sim \tau^H$$

其中 τ 量是对随机变量 ξ 进行分析的时间长度。海浪分析得到的 H 值为

$$H = 0.87 \pm 0.01$$

这样，对于本节一开始提出的分析“百年一遇”海浪高度的问题，只要我们在图 7.15 中把 τ 延伸至一百年的尺度，关于百年尺度的海浪高度统计结果就可以由短时期的观测资料，利用 R/S 方法外推而得到。上面海浪分析的方法可以类似地应用于洪水泛滥、河流流量变化等许多自然现象的分析。

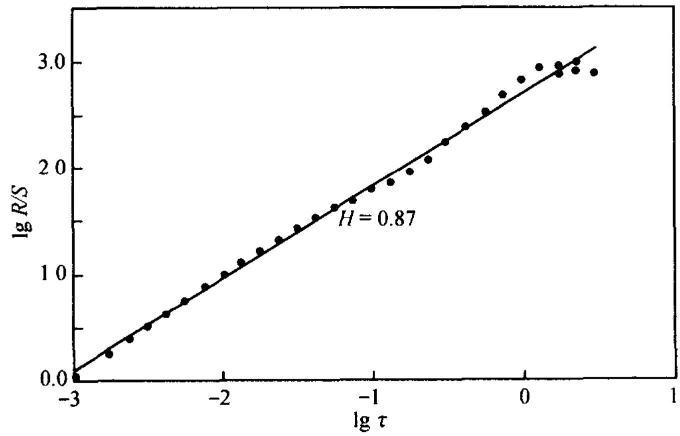


图 7.15 海浪高度的 R/S 分析

将 Tromsoflaket 和海浪高度时间记录看成是一个随机系列$\{\xi\}$，对其进行 $\lg R/S \sim \lg\tau$ 的分析，图中黑点代表分析的结果；直线代表 Hurst 的经验关系；$R/S \sim \tau^H$，$H = 0.87 \pm 0.01$(根据 Froyland 等，1988)

第二个例子是地震的年频度分析。一个地区每年发生几次地震，是一个地区地震活动性强弱的定量描述。地震年发生频度对于地震危害性分析，地震工程等都是一个关键性的参数。但是，一个

地区每年发生的地震数目因年而异，表现出强烈的统计起伏性。因此，了解其统计特征，正确地确定地震年频度及其统计涨落，是十分重要的。

当我们研究在一个给定的地区内震级大于或等于 m 的地震时，我们可以得到一系列每年的地震数目

$$\xi(t_1),\ \xi(t_2),\ \xi(t_3),\ \cdots$$

我们可以把 $\xi(t)$ 看成是一随机的时间记录，按照上面介绍的标准的 R/S 分析方法，首先求出每年发生地震的平均年频度

$$\langle\xi\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\xi(t)$$

然后，求出累积离差，$X(t,\ \tau)$见式(7.2)，最后求出极差 $R(\tau)$。我们要指出的是，这样求出来的 $R(\tau)$，是指在 τ 年期间可能记录的最大地震数目与最小地震数目之差，这就是地震频度问题上 $R(\tau)$ 的实际意义。这样，通过 R/S 分析，我们不但可以由实际资料得到的地震年发生频度的平均值 $\langle\xi(t)\rangle_\tau$，也可以得到在 τ 年期间地震数目的最大涨落 $R(\tau)$，而且还知道

$$R(\tau)/S \sim \tau^H$$

我们也可以对上述地震年发生频度的方法作一些变化，对于一个给定的地区，震级大于或等于 m 的地震的重复周期 $t_{\rm m}$ 是很容易计算出来的，只需将观测资料的总时间长度除以震级大于或等于 m 的地震数目即可。刘杰等以 $t_{\rm m}$ 作为地震频度的时间统计单位。对于 m 级以上的地震，我们得到了一个时间记录：

$$\{\xi_i\} \qquad i=1,\ 2\cdots,\ n,\ \cdots$$

显然，由于我们这种时间单位是根据震级 m 的大小而选取的，所以 ξ 的取值多数为 1，少数为 0，2，3，…，极少数为 4，5，…一般可以认为 ξ 的均方差 S 为

$$S=1$$

这时，极差 R 表示在所研究的时间范围 $n \cdot t_{\rm m}$ 中，地震数目的最大涨落。而且由 R/S 分析，可知

$$R/S \sim n^H$$

图 7.16 给出了几个地区的 R/S 分析结果。

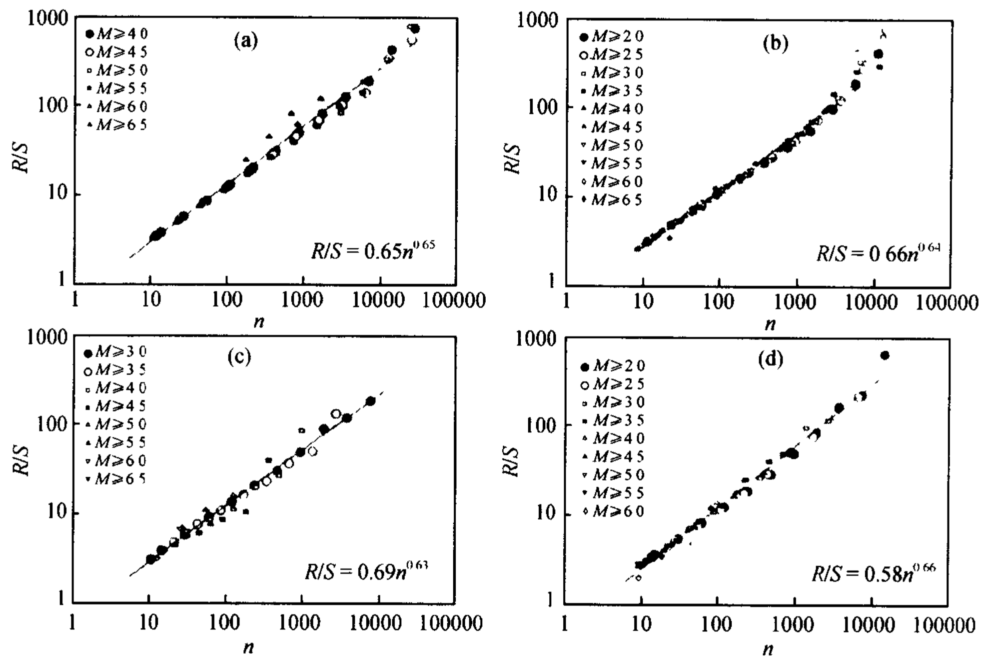


图7.16 地震目录的R/S分析

(a) 全球（1964～1994年）；(b) 中国大陆（1970～1996年）；(c) 南加州（1932～1995年）；(d) 华北（1970～1994年）地震时间序列进行R/S分析的结果（刘杰等,1997）；图中给出了不同震级层次地震的 $\lg R/S \sim \lg n$ 数据，可以看到，对应于同一地区，它们分别近似地落在同一条直线上。地震时间序列的R/S分析结果表明：地震的发生在大、小时间尺度之间和不同震级层次之间，都具有相似的统计规律性。地震的时间分布是自仿射形的

在图 7.16 中一个有趣的现象是，对同一地区不同震级层次的地震时间序列进行 R/S 分析，其结果在 $\lg R/S$-$\lg\tau$ 双坐标中，近似地落在同一条直线上，表明由不同大小的地震统计的 Hurst 指数值近似相等。这一结果反映了不同震级层次地震之间的统计自相似性。在下一章中，我们可以看到这种 R/S 分析结果所表现出的自相似性与地震时间分布的分形分析结果一致的，它们共同反映了不同大小的地震所具有的相似的分形特征，而这正是地震层次模型的理论基础。另一方面，同 Hurst 研究其他自然现象的结果类似，地震时间分布的 Hurst 指数均大于 0.5，这揭示了地震的发生具有随机和双重性，而 Hurst 指数偏离 0.5 的程度就衡量了随机性因素与确定性因素在地震的时间分布中所占的比重。

R/S 分析结果不仅展示了地震发生的规律性，而且对于地震危险性估计也具有应用意义。

当我们研究某一地区今后 T 年的地震危险性时，当前最关键的问题是对地震发生频度的确定性做出估计，我们对 m 级地震可以计算出来它的平均发生时间 t_m，然后由 $T/t_m=n$ 求出该时间记录的相对长度(相当于平均发生时间 t_m 而言)，这时可以利用 Hurst 的经验公式

$$\left.\begin{array}{l}R/S\sim n^H\\ S=1\end{array}\right\}$$

对于 T 时间中 M 级地震发生次数的涨落做估计，实际计算中，可以取作为不确定性的估计。

练　习　题

1. 复述如何根据进水量设计水库库容的方法。

2. 假定某一年在果园中同时种下了许许多多棵树，说明：$R(t)$ 是种果树后第 τ 年，最粗的树与最细的树干直径之差。

提示：

(a) 令 $\xi(t)$表示某一棵树在树干直径方面的年增长率；

(b) 引入“理想树”作为参考标准，“理想树”是指直径每年以 $\langle\xi\rangle_\tau$ 速度增长的树：

$$\langle\xi\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\xi(t)$$

(c) 极差 $R(t)$表示了在 τ 年间一棵树相对于“理想树”而言在树木直径方面的最大涨落；

(d) 对于果园中许许多多棵树而言，因为它们有着相同的统计规律，因此，在第 τ 年，$R(\tau)$表示最粗的树与最细的树在直径方面之差。

3. 定义一固定时段(如 5 天或 1 个月)的降雨量为发生洪水的定量指标。说明百年一遇洪水的强度为十年一遇洪水强度的 10^H 倍，H 是 R/S 分析中的 Hurst 指数($H\approx0.7$)。

4. fBm(分数布朗运动)是自仿射分形，具有固定的 D、H 和 β 参数。证明：对 fBm 进行 R/S 分析，所得到的 Hurst 指数与自仿射分形分析得到的 H 值相同。

第八章　地震学中的分形

人类对地震的洞见肇始于中国。早在公元 132 年东汉时期，张衡就发明了候风地动仪，用来测量地震发生的方位。这一测量本身包含着重要的对地震本质的认识，即地震是沿一定方向从远方传来的地面震动。直到 17 世纪，这一概念才被欧洲人重新确认。

地震学产生以后，它的研究大致可以分为两个方向：一是研究一次地震的震源过程和地震发出的震波的传播；二是研究一群地震的活动规律和各次地震之间的联系，探索地球动力学演化和地震预测问题。分形几何给地震学研究带来了新方法和新的探索，而且这些方法和探索，存在着应用于其他学科的可能性；另一方面，地震学中的许多现象和观测资料，又为分形几何的发展提供了营养和动力。例如，分形中幂律的最好例子是地震学中的 GutenberG-Richter 关系式，而自组织临界现象等概念的提出都起源于地震学的研究 (Bak and Tang，1988，1989)。

8.1　地震活动性

当我们研究一群地震的活动规律时，称之为地震活动性研究。在这方面，最重要的关系是地震的震级和频度关系。

1. Gutenberg-Richter 关系

Gutenberg 和 Richter 在研究全球地震活动性时(Gutenberg and Richter，1954)，发现震级 m 以上的地震数目 $N(\geqslant m)$与震级 m 之间有以下关系：

$$\lg N(\geqslant m)=a-bm \tag{8.1}$$

式中 a，b 为常数。从 20 世纪 50 年代开始的许多研究表明，在许多地区，这个关系式都是成立的。所以，人们把 Richter 提出震级的概念和 Gutenberg 等提出震级-频度关系式，作为经典地震学发展中的两个里程碑。实际上，若没有 Gutenberg-Richter 关系式，震级的概念也不会受到人们的普遍承认。

我们可以将式(8.1)以另一种形式写出来

$$\lg\dot{N}(\geqslant m)=\dot{a}-bm$$

式中，$\dot{N}(\geqslant m)$变成了每年发生的地震数目，称之为发生年频度；$\dot{a}$ 变成了每年发生 $m\geqslant 0$ 级地震数目的对数，即

$$\dot{a}=\lg\dot{N}(\geqslant 0)$$

Purcaru 等(Purcaru *et al.*，1982)对全球发生的地震进行了统计，对于全球而言，得到 $a=8$，$b=1$。于是全球的地震活动性可以写成

$$\lg N(\geqslant m)=8-m$$

实际上，各地区 b 值不尽相同，但多数地区 b 值取 1 左右的数值，我们用全球统计得到的 a，b 值，是希望读者能获得对于地震活动性的定量认识。表 8.1 给出了全球和中国地区地震活动性的基本数据。

表 8.1　由 G-R 关系得出的地震活动水平

m	1	2	3	4	5	6	7	8
每年全球发生次数	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1
$\dot{n}(\geqslant m)$	1.5×10^2	1.5×10	1.5	1.5×10^{-1}	1.5×10^{-2}	1.5×10^{-3}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-5}
$t\ (m)$	7×10^{-3}	7×10^{-2}	7×10^{-1}	7	70	7×10^2	7×10^3	7×10^4
华北地区：地震活动水平均为全球平均值的 4 倍								
$\dot{n}(\geqslant m)$	$610\times^2$	60	6	6×10^{-1}	6×10^{-2}	6×10^{-3}	6×10^{-4}	6×10^{-5}
$t(m)$	14 小时	6 天	2 月	1.7 年	17 年	170 年	1.7×10^3 年	1.7×10^4 年
按全球平均水平，中国大陆(20°×40°)								
$\dot{n}(\geqslant m)$	1.2×10^5	1.2×10^4	1.2×10^3	1.2×10^2	12	1.2	$1.2\times10^{\ 1}$	1.2×10^{-2}
$\tau\ (m)$	4 分	40 分	7 小时	3 天	1 月	0.8 年	8 年	80 年

表 8.1 中的一些符号的意义如下：

$\dot{n}(\geqslant m)$：每年在 1°×1°面积中平均发生的震级大于等于 m 的地震数目；

$t(m)$：在 1°×1°中平均发生 1 次大于等于 m 级地震所要的时间；

$\dot{N}(\geqslant m)$：某区域每年发生震级大于等于 m 的地震数目；

$\tau(m)$：某区域平均发生 1 次大于等于 m 级地震需要的平均时间。

表 8.1 对我们研究某地区地震活动水平提供了一个参考标准。

2. G-R 关系式和分形

G-R 关系给出的是地震发生的频次数与地震的震级 m 的关系。m 是表示地震释放的地震波能量大小的一种变量，它是由地震产生的地震波进行测量的。G-R 关系不是一种幂指数关系。

G-R 关系中的 b 值是地震学中的一个重要参数，它描述了大小地震之间的比例关系。许多地震学家都对 b 值进行了深入的研究。Hirata(1987)分析了 1926～1986 年日本东北地区所发生的$M>5.5$ 的地震震中分布，求得其分维数 D，因此得到了分维与 b 之间的关系为$D=2.3-0.73b$，这是通过对实际资料的分析，确定分维数与 b 值之间关系的最初尝试。另外，一些地震学家通过其他研究方法也得到了地震断层系统的分维数与 b 值之间的相关关系(Aki，1981；King，1983)。利用地震学中一些基本关系式，可以根据 G-R 关系，求出一群地震中，地震数目和产生地震的断层几何参数之间的分形关系。在地震学中，与地震断层几何参数，例如与地震断层面面积 A 有直接关系的量是地震矩 M：

$$M=\mu A\delta$$

式中，μ 是地震断层附近岩石的剪切模量；δ 是地震时跨断层两侧的平均位移，一般情况下，δ 与断层面面积 A 有关。根据地震的位错模型，金森博雄进一步把上式表示为

$$M\sim A^{3/2}\sim r^3$$

式中 r 是断层面的等效直径，也可以看作是断层的长度。

地震矩是衡量地震释放能量多少的一个重要的参数。地震的震级 m 也是表征地震大小的另一个参数，地震矩 M 和地震震级 m 之间关系为

$$\lg M = cm + d$$

金森博雄(Kanamori，1975)讨论了在一般情况下，常数 $c=1.5$，常数 $d=9.7$(M 以焦耳为单位)。将以上三个式子和 G-R 关系式(8.1)结合在一起，去掉震级 m，我们可以由 G-R 关系式导出

$$N(\geqslant r) = A_r r^{-3b/c}$$

上式中 $N(\geqslant r)$ 表示发震断层长度大于等于 r 的数目。A_r 是个常参数。将金森博雄在一般情况下得到的 $c=1.5$ 值代入，上式可写成

$$\left.\begin{aligned} N(\geqslant r) &= A_r^{-D} \\ D &= 3b/c \approx 2b \end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

由 G-R 关系推导出的式(8.2)表明，在一群地震中，发震断层长度 r 和断层数目之间存在着幂指数关系，也就是说，一群地震中断层长度 r 的分布是分形的。

3. 断层分段(fragmentation)和特征地震(characteristic earthquake)

解释地震断层的分形分布，有两种模型。一种模型假定存在许多断层(有多少地震就有多少条断层)，长度长的断层产生大地震，长度短的断层产生小地震，每一条断层都相应一定震级大的地震，这种地震都代表着产生地震的断层的特征(例如以断层长度 r 为指标的特征量)，因而称之为特征地震。

另一种模型假定存在着一条断层，断层上的一段长度 r 的部分发生错动时，就会产生与 r 相应的震级为 m 的地震。也就是说，该条断层会产生分形的地震活动。要详细研究这种地震活动，必须假定该条断层上的每段情况是不同的，进行断层的分段研究。

哪种模型对呢?

为了回答这个问题，必须找到一些地震进行研究，这些地震的发展断层情况已经足够清楚地研究过了。加州圣安德烈斯断层有一

段在 Parkfield 附近，这段断层情况已经多次研究过了。该断层在1881、1901、1924、1934、1966 年发生过断层错动，每次均产生5.5 级左右的地震。而这一段断层上没有地震分形分布的证据。有些科学家认为地震分形分布意味着断层(在形态上)具有分形分布，因此，倾向于支持特征地震的说法。但这种例子还不多，关于哪种模型更对，还需要作进一步的工作。不过有一点是重要的，无论是断层分段，还是特征地震，它们都是沟通地震学与地质学研究的桥梁。

最后一点要提及的，关于地震活动性的模拟研究，目前进行了大量工作。在模拟研究中，必须考虑上述的地震发生和断层分布的关系。

4. G-R 关系中 $N(\geqslant m)$ 与 $N(=m)$ 的关系

$N(\geqslant m)$ 表示的是震级大于或等于 m 的地震数目。现在引入符号 $N(=m)$，它表示在震级 m 附近单位震级内的地震数目。实际利用 G-R 关系式时，有时利用累积(accumulated)频度 $N(\geqslant m)$，有时也利用单位震级内的频度 $N(=m)$。下面证明，这两种做法是等效的。为方便计，我们由 $N(=m)$ 的关系推导 $N(\geqslant m)$ 的关系。这样做，推导简单，但和式(8.1)中的写法在次序上倒了过来。

假定我们有

$$\lg N(=m)=A-bm$$

A 为常数，令

$$\alpha=A\ln 10, \qquad \beta=b\ln 10$$

有

$$N(=m)=\mathrm{e}^{\alpha-\beta m}$$

震级大于或等于 m 的地震数

$$N(\geqslant m)=\int_m^\infty N(=m)\mathrm{d}m=\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta m}=10^{a-bm}$$

式中，常数 a 为

$$a=A-\lg(b\ln 10)$$

由 $N(\geqslant m)$ 的结果，两边取对数，则得

$$\lg N(\geqslant m)=a-bm$$

因而，无论用 $N(=m)$，还是用 $N(\geqslant m)$来描述一群地震中震级与频度关系时，所得结果是一样的，读者也许会奇怪，累积频度 $N(\geqslant m)$的计算公式中常数 α 比单位震级频度 $N(=m)$公式中的常数 A 还要小一些。其实，这与 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)=1$ 中 $1\ll\delta(0)$ 的道理是一样的，$N(=m)$相当于地震频度的尖脉冲，只不过它不像 $\delta(t)$那样只在一点取值，而是以指数形式 $e^{-\beta m}$ 衰减罢了。

由上面一些公式，我们知道

地震总数 $$N=\int_{\infty}^{\infty}N(=m)\mathrm{d}m=e^{\alpha}/\beta$$

所以，从概率角度，地震按震级 m 的概率密度函数 $f(m)$和超越率函数 $P(\geqslant m)$分别为

密度函数 $$f(m)=\frac{N(=m)}{e^{\alpha}/\beta}=\beta e^{-\beta m}$$

超越率函数 $$P(\geqslant m)=\int_{m}^{\infty}f(m)\mathrm{d}m=e^{-\beta m}$$

5. 地震活动性中的其他分形

我们的研究对象是一群地震。可以用不同的参数从不同方面来描述这一群地震，研究其相互关系。对于一群地震中的第 i 个地震，我们可以用下列参数：

m_i：第 i 个地震的震级；

x_i：第 i 个地震的震源位置；

t_i：第 i 个地震的发震时间；

r_i：第 i 个地震的发震断层长度；

u_i：第 i 个地震的断层错动位移；

M_i：第 i 个地震的地震矩。

上面几小节介绍了用 G-R 关系研究这一群地震$\{m_i\}$的分布特征，进而推导出发震断层长度$\{r_i\}$的分形分布。用类似方法，统计分形可以用来广泛地研究这些集合的特征。

谢和平(1994)在一篇综述中介绍了其中的一些研究。下面只举一个断层位移$\{u_t\}$的例子。观测资料表示，断层位移 u 的分布具有分形特征

$$N(\geqslant u_t)=A_u u^{-D_u}$$

式中，A_u 为常数；D_u 为位移分形的分维。式(8.12)表示

$$N(\geqslant r)=A_r u^{-D_r}$$

以上两式是从不同角度对一群地震的描述。现研究从位移角度得到的分维 D_u 和从断层长度角度得到的分维 D_r 之间的关系。

对于某一研究区域，从位移角度来看，断层总数 N_u 应为

$$N_u = \int_0^{u_{\max}} \frac{dN(\geqslant u)}{du} du$$

式中 $u_{\max}$是该区断层的最大位移。另一方面，从断层长度角度来看，该区的断层总数 N_r 应为

$$N_r = \int_0^{r_{\max}} \frac{dN(\geqslant r)}{dr} dr$$

$r_{\max}$是这个研究区域中断层最大长度。显然，

$$N_u = N_r$$

于是有

$$A_u u_{\max}^{-D_u} = A_r r_{\max}^{-D_r}$$

这样，可以求出 D_u 与 D_r 的关系。其他参数的分维也可以依照上面的作法相互联系起来。

8.2 地球介质的层次结构

前面第四章介绍过岩石的碎形(fragmentation)概念。当破碎岩石时，破碎的岩石块的(等效)半径 r 和岩石块的数目 $N(\geqslant r)$之间存在着分形关系：

$$N(\geqslant r)\sim r^{-D}$$

D 是分维。实际测量岩石碎块时，我们用不同大小筛孔的筛子对碎形进行分类。筛孔大小通常是离散的一组数 $\{r_0, r_1, \cdots r_i, r_{i+1}, \cdots\}$

这就构成了一个离散的 r_i 层次：在 r_i 层次，观测到线度大于或等于 r_i 的碎块数目为 $N_i(\geqslant r_i)$；而在 r_{i+1}层次，其数目则为 $N_{i+1}(\geqslant r_{i+1})$，显然

$$\frac{N_{i+1}}{N_i}=\left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^D \tag{8.3}$$

式中 D 是一个常数，与岩石的性质无关，也与破碎过程无关。

式(8.3)表明对于任意的 r_i 和 r_{i+1}，即对于任何的观测层次，其分布规律遵循幂指数关系。我们把这样一处不连续(离散)的，分散的分形结构称为层次结构(hierarchy)。

地球自形成以来，在各种自然作用力下发生着破裂过程，地球介质是否也和岩石的碎形一样，具有层次结构呢?

1. 地质学方面的证据

乌洛莫夫(乌洛莫夫，1994)综合了地质调查和深部探查资料，画出了中亚帕米尔—天山—土兰地区的岩石构造(图 8.1)。这些构造至少是第三纪以及第四纪以来长期构造变化的结果。图 8.1 中所示的断层几何形态，规模最大的断层称为 0 级断裂，在图中以 0－1，

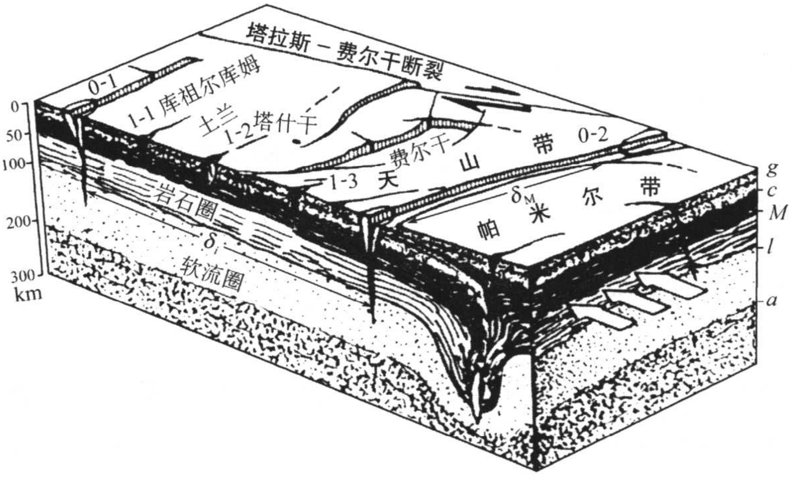


图 8.1　中亚帕米尔—天山—土兰地区岩石层结构简图(引自乌洛莫夫，1994)

从图中可以看到规模巨大的断层 0－1，0－2；也可以看到次一级的断层 1－1，1－2 和 1－3 等。δ_i 表示第 i 级断层之间的距离

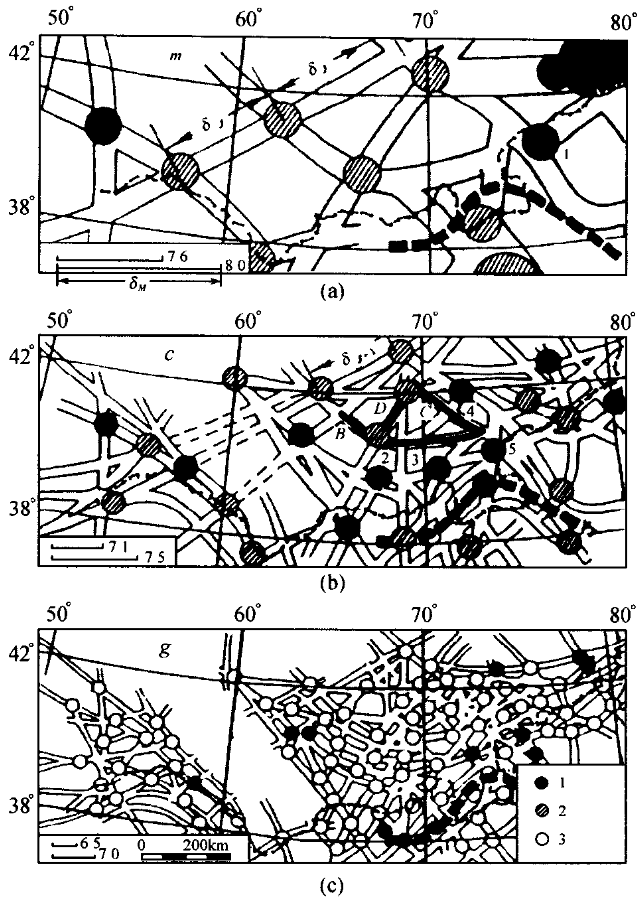


图 8.2　中亚地区的断层—块体构造图(引自乌洛莫夫，1994)

实心圆代表已经发生的地震位置，空心圆和斜影圆表示预期发生的地震位置。
(a)(b)(c)给出了同一地区三个不同层次的构造图，由一个层次转为
另一个层次时，块体线度大约变化 2 倍

0-2表示，图中也可以看到次一级的断裂 1-1，1-2和 1-3 等，为了能看到更多的岩石层的构造层次，在图 8.2 中引用了乌洛莫夫的另一幅更为详细的图。图 8.2(a)为规模巨大的 0 级断裂带的分布，两个 0 级断裂带相隔的距离 $\delta\sim10^3$ km 左右；图 8.2(b)为规模稍小的 1 级断裂带的分布，相邻的断裂带距离 $\delta\sim(3\sim5)10^2$ km；图 8.2(c)则给出更小一级的断裂分布，相邻断裂带的最小距离约为几

十公里。从图 8.1 和图 8.2 所给出的地球岩石层的具体例子，可以看到，在中亚地区，地球岩石层结构确实存在着层次结构。

乌洛莫夫认为，一个地区的地震活动情况，是与该地区的地质构造密切有关的。为了说明这一点，乌洛莫夫将震级 m 的两次地震的优势相隔距离 δ 与 m 的关系画在图 8.3 中，发现对于 8 级左右的大地震，其两次地震相隔距离约为 10^3 km，它们是与 0 级断裂构造有关的；而相隔距离 10^2 km 左右的断裂系统与 6.5 级地震的发生有关(图 8.3)。

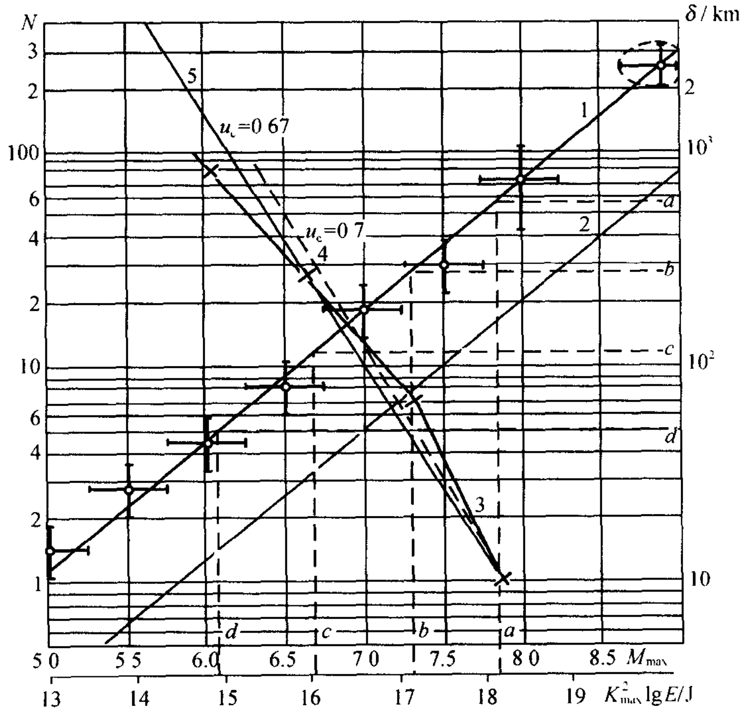


图 8.3　优势震中距离 δ、震源尺度(L)和震级(M)的相互关系(引自乌洛莫夫，1994)

地震优势震中距离与震级关系为：$\lg\delta=0.6M-1.94$。地震震源尺度 L 与震级 M 的关系为：$\lg L=0.6M-2.5$

基于上述地质方面的资料，在分形几何框架之中，形成了下面对于地震产生过程的新的概念性认识：地震过程是构造应力作用下

岩石变形的结果。岩石是一个很大的开放系统，它是由各种规模的块体组成，大块体是由许多对外部作用十分敏感的更小块体聚合而成的，各种块体共同形成一个整体。岩石系统进行的物质和能量的交换，其方式可能是与外部介质，也可能是系统中各块体之间的相互作用。当岩石的某一层次块体发生稳定性的丧失时，应变能被释放，块体之间发生了能量再分配过程。在这个时候，岩石整体的性质实际保持不变，岩石系统中能量及物质交换性质不变，整个地震过程也不改变。这时岩石系统就被看成是一个自组织系统，它保持着动力学平衡状态，而地震的不断发生，使得该系统在平衡状态附近有很小的摆动。

2. 地震活动方面的证据

为了监视努列克水电站 300 m 高大坝蓄水后引起的诱发地震活动，1955 年 1 月至 1972 年 6 月，前苏联的地震学家在塔吉克的努列克附近布设了地震台网，对水库库区 58 km×74 km 的区域地震活动进行详细的观测。该期间共记录 2 级以上的小地震 2014 次，地震定位精度可达 2 km。在分析该区域地震活动时，将这个区域分成 3 个层次的长方形，1 级长方形有 4 个，每个长方形的面积为 29 km×37 km；每个 1 级长方形再等分为 4 个 2 级长方形，每个面积为 14.5 km×18.5 km；每个 2 级长方形再等分 4 个 3 级长方形，3 级长方形的面积为 7.25 km×9.25 km。

对于上述 3 个等级的长方形，计算它们的地震活动指数。所谓地震活动指数，是指一个长方形内的地震数目与包含它的上一级的大长方形地震数目之比，记为 P，如果第 1 级长方形中地震数目分别为 n_1，n_2，n_3 和 n_4，则这 4 个 1 级长方形的地震活动指数 P_1，P_2，P_3 和 P_4 分别是：

$$P_1=n_1/(n_1+n_2+n_3+n_4)$$
$$P_2=n_2/(n_1+n_2+n_3+n_4)$$
$$P_3=n_3/(n_1+n_2+n_3+n_4)$$
$$P_4=n_4/(n_1+n_2+n_3+n_4)$$

我们将 P_1，P_2，P_3，P_4 按大小排列起来，例如按下降的顺序绘在图上(图 8.4)，用 1 表示的曲线代表了 1 级长方形地震活动指数的计算结果。对第 2 级长方形也进行类似的计算，图 8.4 中用 2 表示的曲线代表了 2 级长方形计算结果的平均值。而在第 3 级长方形内，地震活动指数已按 64 个长方形进行了平均，图 8.4 中用 3 表示的曲线则给出了其平均的结果。

图 8.4(a)～(d)给出了 4 段不同时间的分析结果。由图 8.4 可以看出，在所有情况下的图形是相似的。随便取出任意一级相邻的 4 个长方形，地震活动指数高的长方形吸引了 40%～50%的地震，而地震活动指数最低的长方形只吸引了约 10%左右的地震，两者地震数目之比约为 4～5。地震活动的这种层次结构，仿佛表明：如果我们站在很远的地方看地球，由于有限的分辨率，只能看清楚巨大的板块，更细的结构则看不清楚。如果再走近一点，我们则可以看清楚板块内部次一级的构造，更细的结构仍看不清楚。随着不断地走

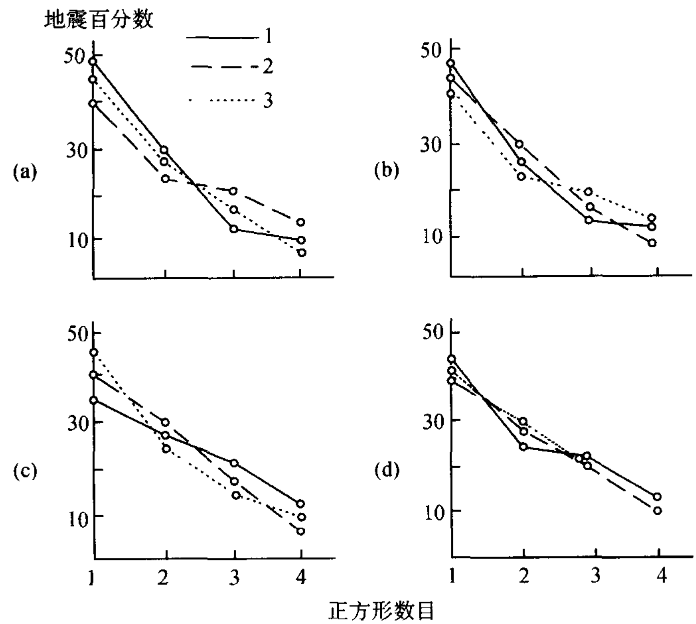


图 8.4　不同等级长方形中地震数目的百分比分别对应不同记录期间

(a) 1955～1960；(b) 1960～1965；(c) 1965～1972；(d) 1955～1972

近，分辨率越来越高，每次的观测视野却越来越小，但每次观察到的图形却都是相似的。

上述结果令人十分感兴趣，因为它导致这样一个结论：不管一个区域的地震活动性水平如何，都可以把它划分成更次一级的区域，按地震活动指数(或按地震活动性)来划分，这些次一级的区域地震活动水平可以分成高、中、低三个层次，最高与最低小区域的地震数目比值约为 4～5，在更细的划分下，例如把一个长方形等分为6～8个更小的长方形，这个比值还会增大。由此可见，甚至在较小的面积内，都可以找到地震活动比较低的地区，它的地震活动水平比相邻地区要低 4～5 倍。

正如第四章统计分形中，关于无标度讨论所指出的那样，这个划小正方形大小的作法不能无限制地进行下去，除了资料数量的限制(因为每个最终的小区域必须足够大，以保证进行统计分析时有足够的精度)外，还有地震发生机理方面的约束。最近，Selwyn 等提出了地震“量子”概念，认为尺度约 500 m 的岩石破裂相当于 1 次地震“量子”，而大的地震是由许多“量子”按层次模型构成的。Selwyn 等认为，他们的假说得到了地震矩和应力降观测资料的支持(Selwyn 等，1995)。

8.3 数学分形和物理分形

为了更好地了解地震发生的统计特征，地震学家们对地震的时间、空间分布已经做了许多研究。在这些研究中，有的是将地震看作是点事件(Smalley *et al.*，1987；Ogata，1988；Robertson and Sammis，1995)，这属于数学分形的范畴；而另一些是将地震用震级或能量来量度(Hirabayashi *et al.*，1992；Bufe and Varnes，1993；Saleur *et al.*，1996)，研究地震的物理分形。在数学分形和物理分形两种情况下，都能得到地震活动性的分形特征。Hirabayashi 等(1992)进一步指出地震能量(或震级)的空间分布的分维比将地震作为点事件的震中分布的分维更重要，特别是当把地震与其他自然现

象作本质上对比时更为如此。通过对区域和全球地震活动的空间相关函数和矩函数进行详细的分析。Kagan 等(Kagan and Knopoff, 1980; Kagan, 1981a, 1981b)发现地震空间分布的分形特征是不依赖于震级的。但是在地震的时间分布中，震级到底起了什么作用呢？或者说，地震时间分布表现出怎样的物理分形特征呢？我们先来讨论地震在时间上的数学分形。

当我们研究某个区域中的地震时，该区域的每个地震的发生时间可以用时间轴上的一个点来表示。所有地震组成的集合就对应于该时间轴上定义的一个点集，这个点集表示了地震发生的时间分布。图 8.5 给出了 1971～1990 年间中国华北 4 级以上地震的时间分布，从图中可以看出，地震事件在时间轴上的分布不是均匀的，有时密、有时疏，这叫做丛集(clustering)现象，现运用分形几何对丛集进行分析(Smalley *et al.*, 1987)。

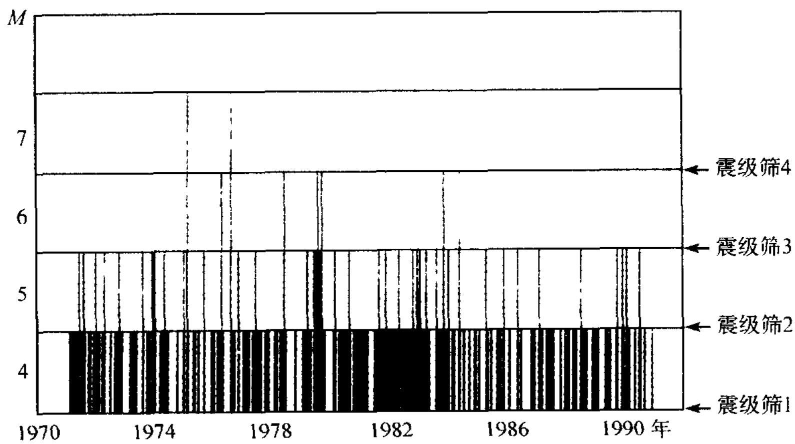


图 8.5　1971～1990 年华北 4 级以上地震发生时间在时间轴上的分布

假定在我们所研究的地区，t_0 长的时间段内一共发生了 N 次地震，地震的平均发生周期 $\tau=t_0/N$。为了分析地震的时间分布，我们采用分形几何中最常用的数盒子方法，即把 t_0 分成 n 等分，每一等分的时间长度为 t：

$$\tau=t_0/n \qquad n=2, 3, 4, \cdots$$

现在计算包含有地震的等分数占总时间长度 t_0 的百分比 $x(t)$。

首先考虑均匀分布。如果地震数目 N 比等分的时间间隔数 n 还大，那么，等分的所有时间间隔中都有地震发生，此时

$$x=1$$

当地震数目 N 小于间隔数目 n 时，此时，只能有 N 个时间盒子包含有地震，是非空盒子，于是

$$x=N/n$$

因此均匀分布的 $x(t)$ 可以写成

$$x(t)=\begin{cases}N/n & \text{如果 } t<t_0/N(\text{即 } n>N)\\ 1 & \text{如果 } t>t_0/N(\text{即 } n<N)\end{cases}$$

如果地震的时间分布是分形的，则当我们用长度为 t 的盒子去覆盖时间轴时，非空盒子数应为 t^{-D} 成比例，于是

$$x(t)\sim t^{-D}/n=\frac{l}{t_0}t^{1-D}\sim t^{1-D} \tag{8.4}$$

式中的 D 是个常数，是分形分布的分维。实际情况是不是像式(8.4)所表示的那样呢？图 8.6 给出根据 1971～1990 年发生在中国华北地区 4 级以上地震的分析结果。图的横坐标 t 是数盒子时的时间盒子时的时间盒子的大小(以分钟计)，纵坐标是在用大小为 t 的盒子进行测量时，有地震的盒子数占总盒子数的比例 $x(t)$。图 8.6 中还给出了地震发生分别符合 Poisson 分布和均匀分布的结果。我们从图 8.6 中可以看到，当时间间隔 t 在 $10^2\sim10^5$ 之间取值时，$\lg x(t)$ 与 $\lg t$ 之间存在着线性关系，由其斜率可以求出分维 D 的值是：$D\approx0.28$。图 8.6 表明，实际地震的时间分布，既不符合均匀分布，又与泊松分布有很大的差异，它在一定范围内表现出分形行为。但是，描述地震丛集的无标度区较窄，不到三个数量级。而且无标度区主要集中在自然周期 τ 的附近，这就是说，地震只在自然周期附近较窄的范围内显示出分形行为。

这种现象的原因，是由于我们把所有的地震事件都看成时间轴上的一个“数学点”，而不对地震事件的大小(点的“质量”)加以区分，这种统计分析的结果，主要反映了数量众多的小地震的特性，掩盖了大地震时间分布的特征。因为大地震数目比较少，发生的时

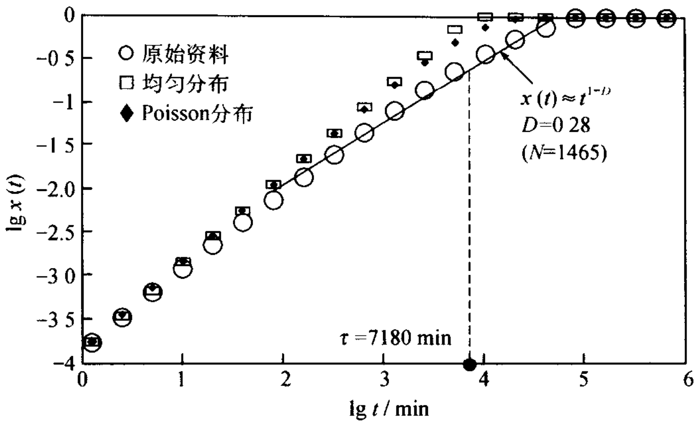


图 8.6 1971～1990 年间华北 1465 次 4 级以上地震时间分布的分形分析结果

空心方格表示均匀分布的结果；实心菱形表示泊松分布的结果；圆圈代表由世纪资料得到的分形分布的结果。在 $10^2 \sim 10^{4.6}$ 分钟的范围内，地震的时间丛集是分形的，且 $D\approx0.28$

间间隔很长。为此，陈颙等（1997）发展了对地震时间分布的物理分形分析方法。

我们用一组震级筛子，把一群地震分成若干子集合，每个子集合对应“质量”相近的一群地震，例如，设计不同筛孔大小的震级筛子，把一个地区的地震分成$[m_1, m_2)$，$[m_2, m_3)$，…，$[m_n, m_{n+1})$等若干子集合(图 8.5)。图 8.7 和表 8.2 给出了当震级筛子的大小每次递增 0.5 级时，华北地区地震各子集合的分维 D 和无标度区的范围。由图 8.7 和表 8.2 可以看出：不同震级范围的子集合都存在着分形关系，而且分维 D 都为 0.3 左右，有着近似相同的取值，这从时间丛集角度揭示了地震活动中的相似性和层次结构。

值得指出的是，各震级子集的无标度区的范围是不同的。不同震级范围内子集的地震自然周期 τ 随着震级增加而增大(见图中的小空心圆圈)，而无标度区是以自然周期 τ 为中心的一个时间范围，对于每一子集，无标度区相对较窄，约在 1～2 个数量级左右。但对所有的子集逐一层次地分析，发现整个地震目录在宽达 4 个数量级的时间范围内存在着时间分形。

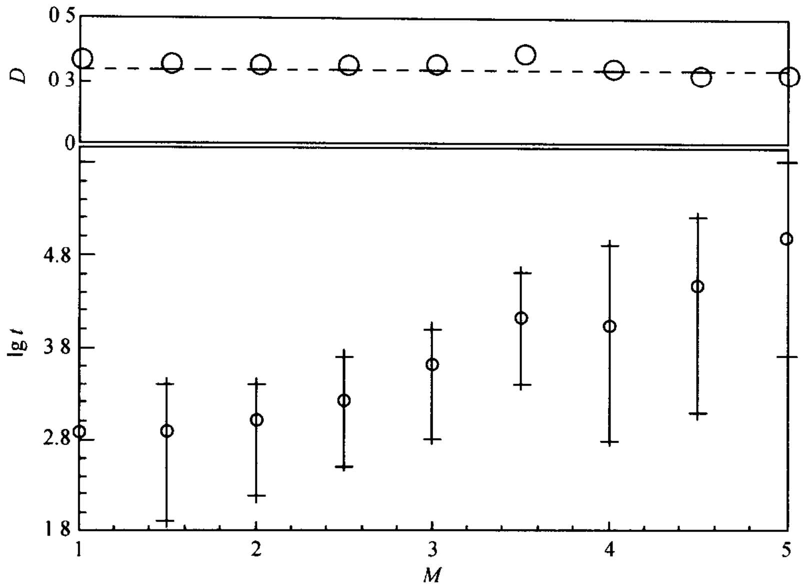


图 8.7　华北地区地震各子集合的分维 D 和无标度区

对于华北地区 1971～1990 年间的地震，按震级大小将其分为(1.5，2.0]，(2.0，2.5]，(2.5，3.0]，(3.0，3.5]，(3.5，4.0]，(4.0，4.5]，(4.5，5.0]和(5.0，5.5]8个子集。图中给出了这8个子集分别由数盒子法得到的分维值 D 和无标度区的范围

表 8.2　华北地区 8 个不同震级范围的地震子集的 D 和无标度区间

震级范围	地震数目	分维 D	无标度区范围 $\lg t_{\min}$—$\lg t_{\max}$	自然周期 τ
1.5～2.0	12914	0.32	1.9～3.4	2.9
2.0～2.5	10159	0.32	2.2～3.4	3.0
2.5～3.0	5184	0.33	2.5～3.7	3.2
3.0～3.5	2596	0.33	2.8～4.0	3.6
3.5～4.0	761	0.36	3.4～4.6	4.0
4.0～4.5	942	0.31	2.8～4.9	4.1
4.5～5.0	363	0.27	3.1～5.2	4.5
5.0～5.5	111	0.28	3.7～5.8	5.0

注：根据华北地震目录：1971～1990。

一个地震可以用多个参数来描述：震源的空间坐标，发震时间，地震的震级等等，上面用来分析地震时间分布所用的物理分形方法，同样也适用于其他地震参数的分析。

8.4 分维随时间、空间的变化

如果资料数目足够多，运用合理的统计方法可以比较精确地确定分维 D，那么，我们就可以在此基础上研究分维随时间和空间的变化。

在分维随时间的变化方面，最有代表性的例子是利用分维随时间的减少来预测岩石的破坏。有人把这种分维随时间减小的过程称之为“岩石破坏过程的降维”现象。

一张纸被撕裂后，形成一条撕裂线；一块岩石破坏后，形成一个破裂面。物体的破坏具有这种降维的特点：二维体的破坏形成一维的破裂线；三维体的破坏形成二维的破裂面。换句话说，n 维物体破坏后会形成 $n-1$ 维的破坏面。破裂总是发生在物体的有限体积之中。这些都是破裂后的结果，那么破裂之前的破坏过程是否是一个分维逐渐降低的过程呢？这种降维特点能不能用于岩石破裂的预测呢？

煤矿中每天都发生许多小的岩爆和声发射，它们发生的位置可以精确地通过仪器测定出来。运用分形几何的数盒子方法，可以求出每一天这些小型岩石破裂和声发射组成的集合的空间分维。图 8.8 是美国 Galena 煤矿的例子(Leightor, 1982)。该图给出了在大型岩爆前 4 天记录分析得到的分维的变化，从图中可以看到，从岩爆发生前 3 天，每天记录的分维不断地减小，分维减小这种降维特点正是大型岩爆发生的预兆(图 8.8)。

当我们研究地震和矿井中的声发射这类问题时，一方面可以从地震(或声发射)的震级-频度关系(见本章第 8.1 节)求出 b 值来；另一方面可以从地震(或声发射)的空间分布，按分形几何的数盒子方法求出其分维 D 来。本章第 1 节证明了，在一定假定下，可以理论上推出

$$D=2b \tag{8.5}$$

因此，对于降维过程既可以通过测定 D 值，也可以通过求解 b 值来进行研究(Hirata，1989)。Sato 等(1986)发现水力开采引起的

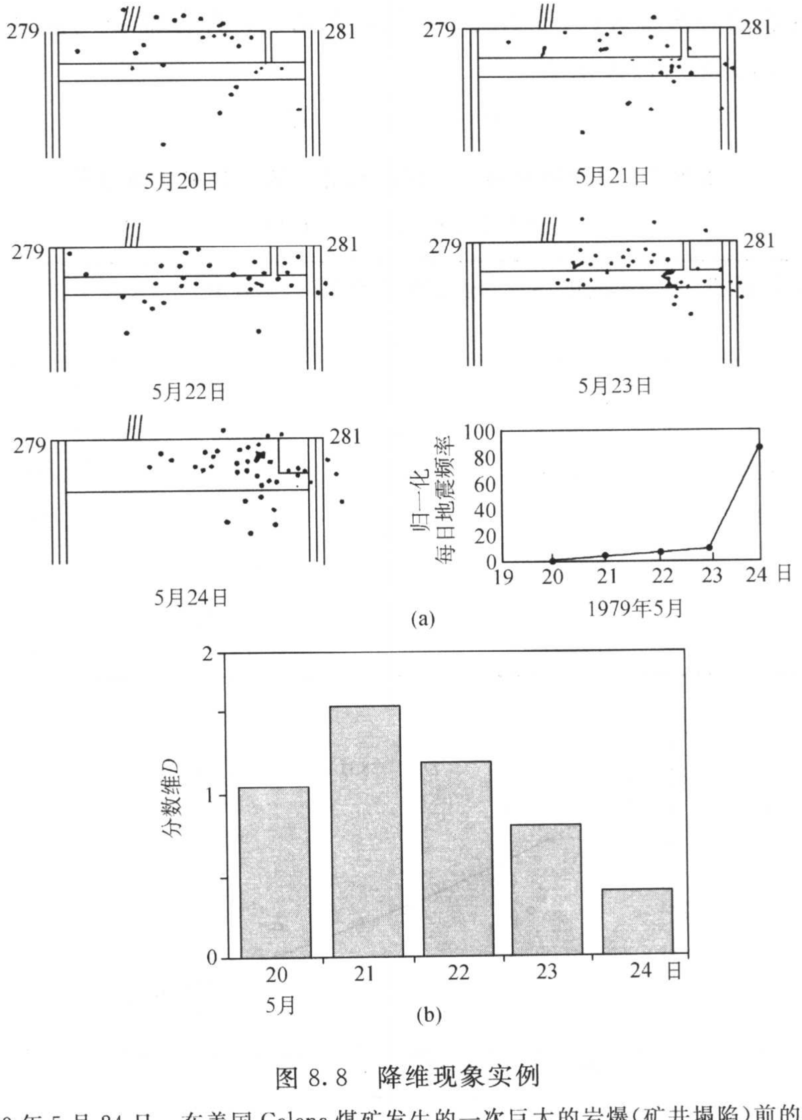


图 8.8　降维现象实例

1979 年 5 月 24 日，在美国 Calena 煤矿发生的一次巨大的岩爆(矿井塌陷)前的降维现象。(a) 岩爆之前，即从 5 月 20 日至 5 月 24 日煤矿中发生的微小震动的位置和每天记录到的微小震动的频度；(b) 由每天微小震动空间分布求出的(空间)分维数随时间的变化

微地震活动也满足 G-R 关系，他们测量了日本砂川煤矿的 b 值和微地震事件(表 8.3)。由方程(8.5)计算的分维值也列在表 8.3 中。地震能量释放随分形维数的变化趋势显示在图 8.9 中，可以看到，能量释放随分形维数(b)值的减小按指数律增加，即分维 D 与能量释放量 E 的关系可以表示为

$$D=C_1\exp[-C_2E] \tag{8.6}$$

表 8.3　日本砂川煤矿所探测到的 b 值、分维和微地震事件(Sato, *et al.*, 1986)

事件数目	地震能/kJ	地震能释放率/(J/m²)	b 值	分维 D
51	54.8	50.2	0.96	1.92
73	209.7	60.6	0.67	1.34
123	10.7	6.1	1.50	3.00
211	31.3	5.6	1.39	2.78
34	52.4	57.8	0.83	1.66
94	86.9	18.0	1.01	2.02
46	77.2	20.3	1.39	2.78

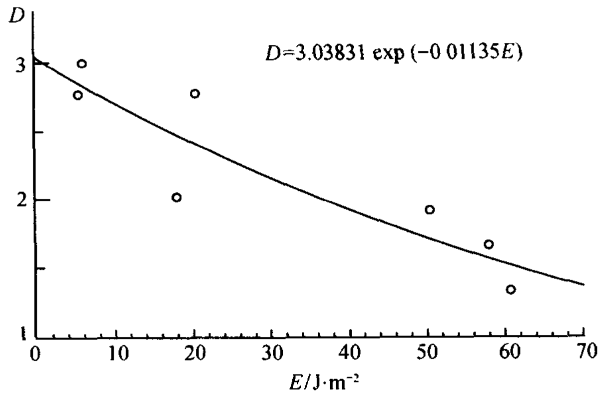


图 8.9　地震能量释放与分形维数的相关曲线
(实验测定结果，Sato *et al.*, 1986)

方程(8.6)从分形和物理机理上做出了大地震震前出现 b 值减小(降维)现象的理论解释。一个低的 b 值(分维值)的出现，意味着岩体内将形成一个大的断裂表面或断裂体积，这对应于一次岩体失稳事件的发生。因此在地震预报中，许多人通过大震前 b 值减小来研究降维现象，进而探讨地震预报的可能性。

在用地震空间位置分布求分维 D 的方面，许多人都进行过研究(Robertson *et al.*，1995；Volant *et al.*，1994)。Robertson 等人仔细地分析了美国帕克菲尔德(Parkfield)等三个地区地震震源位置的空间三维分布，他们求出的 $D \leqslant 2.0$ 的结果，与地震学中多数情况得到的 $b \leqslant 1.0$ 的结果是符合得很好的。而且 Robertson 等讨论了为什么在三维岩石体中，一群地震空间分布的分维 D 却小于等于 2 的问题，他们提出地震发生在三维空间中岩石块状结构的联结部分，也就是发生在断裂网络上，这样就将地震学的观测与地壳构造形态联系了起来。

在分维随空间变化方面，遇到的最大问题是分维 D 的确定精度问题。我们研究的一群地震所在的空间范围必须足够大，必须保证统计时有足够的地震数，以便得到合理的统计结果；另一方面，所研究的空间范围又必须足够小，以便保证所得结果有足够的空间分辨率。目前，由于地震的仪器观测时间不长(只有 30 余年)，地震数目不够多，因此，难于兼顾上述两个方面的要求，在分维随空间变化方面的研究结果还不多。可以相信，随着观测技术的进步和观测资料的积累，这方面的研究将会有大的进展。

第九章　小波理论及其在分形研究中的应用

在自然界中，类似于 Cantor 集合、Koch 曲线这样简单而在数学上严格自相似的分形体几乎是不存在的，广泛存在的是不能只用一个分维数来描述的复杂而不均匀的分形体。第六章所介绍的多重分形就是其中的典型例子。广义分维 D_q 和多标度连续谱 $f(\alpha)$ 准确地描述了多重分形中的不同层次分形行为的统计特征，因而成为研究复杂分形体内部精细结构的有效数学工具。但值得指出的是，它们与信号分析中的 Fourier 变换具有类似的缺点，即无法提供有关不同层次分形特征在空间（或时间）分布的任何信息。数学理论的发展，特别是在局域化思想基础上发展起来的小波理论（wavelet theory），为这类问题的解决提供了可能。

小波理论的提出，可以追溯到 1910 年 Haar 提出的小“波”规范正交基及 1938 年 Littlewood-Paley 对 Fourier 级数建立的L-P理论，即按二进制频率成分分组 Fourier 变换的相位变化本质上不影响函数的形状及大小。而小波概念的首次提出则来自于法国一位从事石油信号处理的工程师 Morlet。1984 年 Morlet 在分析地震波的局部性质时，发现传统的 Fourier 变换难以达到要求，因而在地震波信号分析中引入了小波变换的概念，并通过物理的直观和信号处理的实际需要经验性地建立了反演公式，但在当时未能得到数学家的认可。直到 1986 年，著名数学家 Meyer 偶然地构造出一个真正的小波基，并与另一位数学家 Mallat 合作建立了构造小波基的统一方法——多尺度分析之后，小波理论才开始蓬勃发展起来。1992 年比利时女数学家 Daubechies 撰写了《小波十讲(Ten Lectures on Wavelets)》，对小波理论的普及和应用起了重要的推动作用。此后，随着数学基础

的完善，小波理论在信号分析、语音合成、图像识别、计算机视觉、数据压缩、CT 成像、地震勘探、大气与海洋波的分析、分形生长、流体湍流以及天体力学等方面都取得了具有科学意义和应用价值的重要成果。本章将对小波理论的基本概念、数学基础，及其在分形研究中的应用作简单介绍。

9.1 构造-谱域双域信号分析

信号分析的主要目的是寻找一组基本函数对信号进行分解和重构，以准确提取信号中所包含的重要信息。一个信号 $f(x)$既可以用其 Fourier 谱展开：

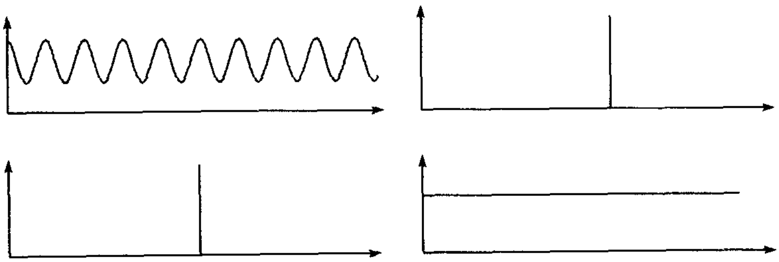
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\xi$$

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x \tag{9.1}$$

也可以表示为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x' - x)\mathrm{d}x' \tag{9.2}$$

其中 x 既可以代表时间坐标，也可以代表空间坐标，我们称之为构造域变量。相应地，与时间对应的变量 ξ 为频率，与空间对应的 ξ 为波数，称为谱域变量。式(9.1)表明，Fourier 变换采用具有精确谱域定位和无限构造空间展布的基本函数($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$，图 9.1(a))对信号进行



(a) (b)

图 9.1 单域信号及其谱分布

(a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$(实部)及其谱分布；(b) $\delta(x)$及其谱分布

分解和重构，而式(9.2)则相反，表示了具有高度空间局域分布但毫无谱域定位性的基本函数($\delta(x)$，图 9.1(b))的信号构成。在小波理论建立之前，Fourier 分析是刻画函数特征、求解微分方程、进行数值计算的主要方法和有效的数学工具；而式(9.2)的表示方法则在诸如与波动方程有关的研究中有重要应用。

显然，上述两种方法均属于单域信号表示方法。以前者为例。由于 $e^{\pm i\xi x}$ 的幅值在任何情况下均为 1，因此，谱 $F(\xi)$ 在任一 ξ 处的值是由信号 $f(x)$ 在整个构造域上的贡献决定的；反之，$f(x)$ 在某一 x 处的状态也取决于 $F(\xi)$ 在整个谱域的特征。$f(x)$ 和 $F(\xi)$ 彼此是整体刻画，不能反映各自的局域性质。图 9.2 给出了一个典型例子。图 9.2(a)、(b)分别显示了在构造域完全不同的两个信号，但两者却具有相同的谱域特征(图 9.2(c))，说明 Fourier 分析方法无法将这两个信号在谱域区分开来。

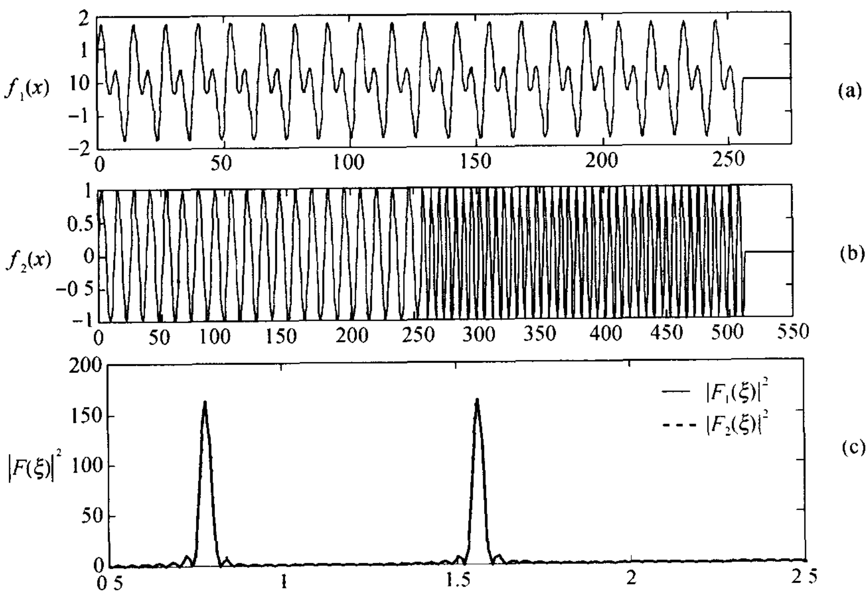


图 9.2　两个信号 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 及其频谱 $|F_1(\xi)|^2$ 和 $|F_2(\xi)|^2$

自然界和人类社会中充满了随时空变化的非平稳信号，如旋律时快时慢，声音时高时低的音乐，高低错落的地表起伏变化，复杂

而有序的地震波，色彩斑驳的画面等等。人们往往关心的是这些信号在不同的局部时间或空间内的谱域特征。寻求能够同时兼顾时间或空间域与频率或波数域特征的信号表示方法是与信号分析处理相关的各个领域所共同追求的目标。信号的一个适当的表示应能结合信号构造(时间或空间)与谱(频率或波数)双域这两种互补描述的优点。Wigner-Ville 分布和窗口 Fourier 变换(WFT)的引入即为这一思想的体现。Wigner -Ville 分布代表了信号在双域中的能量密度，对应一种非线性二次型变换，与小波变换相去甚远，在本章中将不再涉及。WFT 是在 Fourier 变换基础上发展的一种双域信号分析方法，与小波变换有很多相似之处。对于信号 $f(x)$，其 WFT 是通过在 Fourier 变换中采用窗函数的平移对信号做局域化处理来实现的：

$$F(\bar{x}, \bar{\xi}) = \int \mathrm{d}x f(x) g(x - \bar{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\xi} x} \tag{9.3}$$

其中 $g(x)$ 为以 $x=0$ 为中心的平方可积窗函数，即 $g(x) \in L^2(R)$，$\bar{x}, \bar{\xi}$ 分别表示局部构造参数和局部谱参数。以 $\bar{x}$，$\bar{\xi}$ 组成的局部构造-谱空间称为相空间。$F(\bar{x}, \bar{\xi})$称为信号 $f(x)$的 WFT 系数或相空间谱。WFT 的变换模式可由图 9.3(a)形象地表达出来。随着 $\bar{x}$ 位置的变化，函数 g 所确定的窗口在 x 轴上移动，使信号 $f(x)$逐段参与分析。相空间谱 $F(\bar{x}, \bar{\xi})$ 大致反映了 $f(x)$在 $\bar{x}$ 位置处具有 $\bar{\xi}$ 谱成分的相对含量。窗口 Fourier 反变换(重构)可表示为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi S^2} \iint \mathrm{d}\bar{\xi}\, \mathrm{d}\bar{x}\, F(\bar{x}, \bar{\xi}) g(x - \bar{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\xi} x} \tag{9.4}$$

这里 S 是窗口的 L^2 模，

$$S^2 = \| w \|^2 = \int | w(x) |^2 \mathrm{d}x \tag{9.5}$$

加窗的 Fourier 调谐函数 $g_{\bar{x},\bar{\xi}}(x) = g(x - \bar{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\xi} x}$ 即为 WFT 的基本函数。在量子理论中，这种由一个 $L^2(R)$空间的函数 g 通过对相空间的点$(\bar{x}, \bar{\xi})$平移而生成的函数族 $\{g_{\bar{x},\bar{\xi}}(x)\}_{\bar{x},\bar{\xi}\in R}$ 称为 Weyl-Heisenberg 凝聚态。

WFT 的构造-谱域局域化特性(相空间分辨率)取决于所选用的窗函数 $g(x)$及其 Fourier 谱 $G(\xi)$的特征，通常用 $g(x)$和$G(\xi)$的标准

差 σ_g、σ_G 的乘积(又称为分辨基元)来描述。σ_g、σ_G定义如下：

$$\begin{aligned}\sigma_g^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)^2 \mathrm{d}x \\ \sigma_G^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 G(\xi)^2 \mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{9.6}$$

Heisenberg 测不准原理给出了构造域和谱域同时达到的最高分辨率，即

$$\sigma_g \sigma_G \geqslant \frac{1}{2} \tag{9.7}$$

式(9.7)中的"="只对 Gauss 窗函数满足。因此 Gauss 窗函数在 Heisenberg 测不准原理意义下具有构造-谱域双域的最优局域性特征。Gabor 于 1946 年首次提出离散形式的 WFT 方法时，选用的就是 Gauss 窗函数，相应的 WFT 也因 Gabor 而被称为 Gabor 变换。窗函数一旦选定，σ_g 和 σ_G 以及 WFT 的相空间分辨基元就随之确定。由于 WFT 在构造域和谱域的窗函数是固定不变的，因此其分辨基元也处处相等，如图 9.3(a)所示。

前面已经指出，单域的 Fourier 分析不能对非平稳的时空信号进行完整描述。虽然 WFT 已经通过窗函数的平移实现了信号的相空间双域表示，在一定程度上反映了信号的局部谱域特征，但缺乏自适

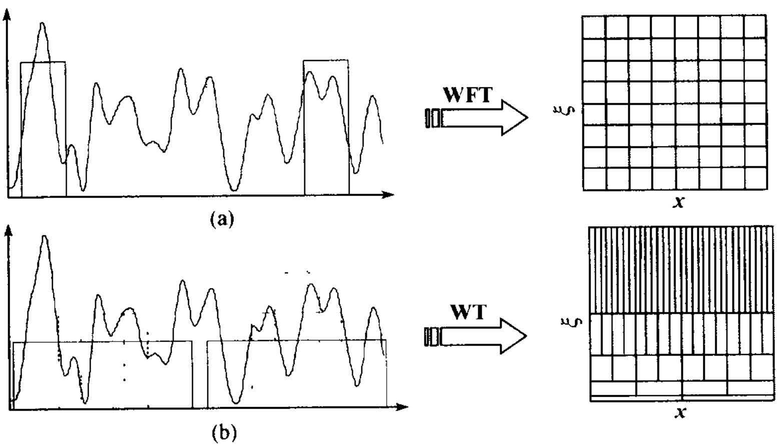


图 9.3 窗口 Fourier 变换(WFT)与小波变换(WT)的对比

x，ξ 分别表示构造和谱域参数。WFT 采用长度固定的窗口，而 WT 采用长度变化的窗口来分析信号。因而前者在构造-谱双域的分辨率处处相等，后者在低频时具有较高的频谱分辨率，而对于高频信息具有较精确的空间定位

应性的固定窗口使该方法只适合于分析特征尺度大致相同的信号。当分析多尺度信号(如分形信号)和瞬态过程(宽带信号)时，对低频部分可以选用较宽的窗口来达到较高的频谱分辨率；而高频信息则需要采用较小的窗口来提取，以保证其精确的空间定位(图 9.3(b))。窗口的平移和自适应伸缩正是小波变换——一种具有更高自适应性的双域信号分析方法的思想出发点。

9.2 小波及小波变换

顾名思义，"小波(Wavelet)"就是小的波形。所谓"小"是指它具有衰减性，如局部非零；而称之为"波"则是指它的波动性，即其振幅呈震荡形式。因此，一个小波函数 $\Psi(x)$除是一个具有有限能量的函数(即 $\Psi(x)\in L^2(R)$)之外，还必须满足下列条件：

(1) 定义域是紧支撑(compact support)的，即在一个很小的区间之外，函数为零。这一条件保证了小波函数的速降特性，以便获得构造空间的局域化；

(2) 平均值为零：$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)\mathrm{d}x=0$，即小波函数具有波动性。甚至 $\Psi(x)$的高阶矩也应为零，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\Psi(x)\mathrm{d}x=0,\qquad k=0,\cdots,N-1 \tag{9.8}$$

此时，$\Psi(x)$称为 N 阶消失矩小波，其 Fourier 谱函数 $\Psi(\xi)$在$\xi=0$处 N 次可微。小波函数的消失矩对于研究信号的规则性以及分形特性起着重要作用(见 9.6 节)。均值为零保证了小波满足容许条件(admissibility condition)

$$C_\Psi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Psi(\xi)^2|}{|\xi|}\mathrm{d}\xi<0 \tag{9.9}$$

将小波函数 $\Psi(x)$经伸缩和平移而生成的函数族 $\{\Psi_{a,b}\}$

$$\Psi_{a,b}(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \tag{9.10}$$

作为基本函数对具有有限能量的信号 $f(x)$($f(x)\in L^2(R)$)进行分解变换，

$$W_{f(a,b)} = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi_{a,b}^{*}(x) \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi^{*} \left(\frac{x-b}{a} \right) \mathrm{d}x \tag{9.11}$$

称为小波变换(Wavelet Transform，WT)。其中“〈〉”为内积运算符；“*”表示复共轭。在上述小波变换中，$\Psi(x) = \Psi_{1,0}(x)$称为基本小波或小波母函数，$\Psi_{a,b}(x)$称为分析小波或连续小波。由于数学上内积表示两个函数“相似”的程度，因此信号 $f(x)$的小波变换 $W_f(a, b)$反映了 $f(x)$与小波函数 $\Psi_{a,b}(x)$的“相似”程度。小波变换中的 b 是定位(平移)参数，相当于 WFT 中的 $\bar{x}$。改变 b 值，则对应于对构造域不同点的分析。参数 a 则是一个尺度(伸缩)因子，当 a 增大时($a > 1$)，表示用伸展了的 $\Psi(x)$波形去观察$f(x)$的大尺度特征；反之，当 a 减小时($a < 1$)，则以压缩了的 $\Psi(x)$波形去衡量 $f(x)$的局部变化(如图 9.4(a)所示)。以 a、b 为参数就构成了尺度-

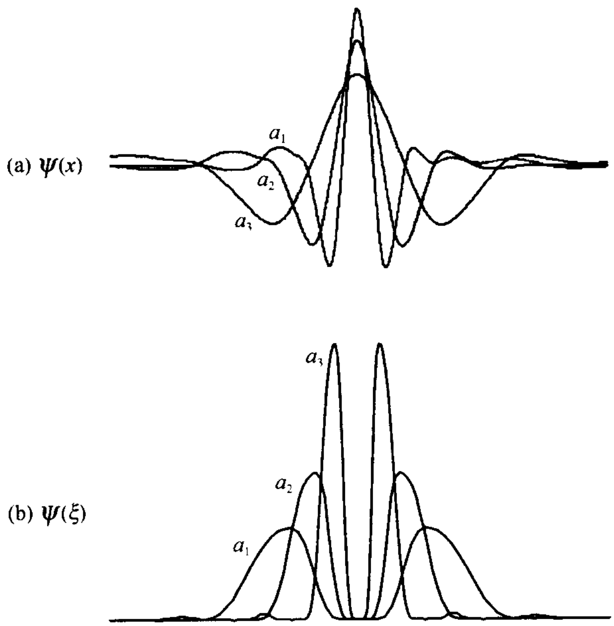


图 9.4　尺度因子对生成小波的影响及 Fourier 谱的变化

尺度因子 a 对生成的小波函数的影响(a)及其 Fourier 变换的相应变化(b)。当小波伸展时，对应的 Fourier 谱收缩，反之亦然。$a_3 > a_2 > a_1$

局部位置的相空间。随着尺度因子 a 的从大到小($0 < a < +\infty$)和平移参数 b 的变化，$W_f(a,b)$包含了 $f(x)$在向空间不同点处从概貌到细节的全部信息。正是由于采用了尺度因子，小波变换成为优于 Fourier 分析和 WFT 的“变焦镜头”，它既可用作“望远镜”，又可用作“显微镜”，而 a 就是其中关键的“变焦旋钮”。更值得注意的是，a 不仅改变了小波构造域窗口的大小($\Psi(x)$波形宽度)，也对应于小波谱域窗口的相反变化(图 9.4(b))。较窄的 $\Psi_{a,b}(x)$波形对应于展宽的 $\Psi_{a,b}(\xi)$频谱区间，相反，较宽的 $\Psi_{a,b}(x)$波形则对应于高度局域化的频谱分布。正如图 9.3(b)所示，小波变换的这种窗口自适应变化对不同尺度的信号特征分析提供了合理有效的构造-谱双域分辨率。

图 9.5 给出了小波函数 $\Psi_{a,b}(x)$随 a，b 变化的示意图。经过伸缩和平移变换，小波波形仍然保持自相似性。按第五章的定义，对小波母函数的伸缩变换显然是一种 Hurst 指数 $H=1/2$ 的自仿射变换。显然，由式(9.10)定义的小波函数族给出了与 WFT 中的 Weyl-Heisenberg 凝聚态函数族 $\{g_{x,\xi}(x)\}_{x,\xi\in R}$不同的另一种凝聚态，称之为仿射凝聚态。自仿射伸缩变换使下式对所有尺度均成立

$$\|\Psi_{a,b}\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_{a,b}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx \quad (9.12)$$

通常选取具有单位能量的 $\Psi(x)$作为小波母函数，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$。此时，$a$，$b$ 不同取值的小波函数 $\Psi_{a,b}(x)$也具有单位能量。

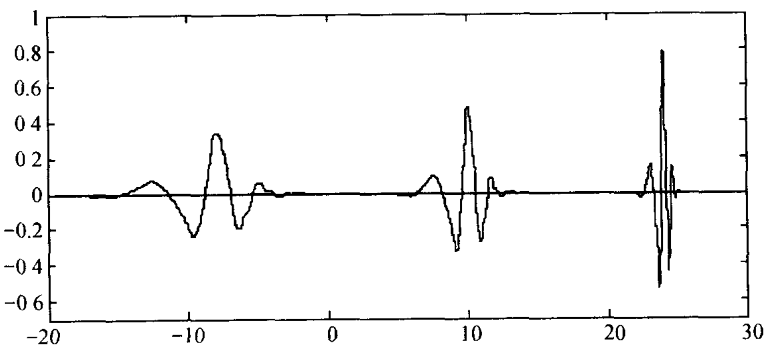


图 9.5　小波函数 $\Psi_{a,b}(x)$的波形与位置随参数 a，b 的变化

如无特殊说明，本章下面介绍的均为这种单位能量小波函数。

大多数小波母函数无解析表达式。图 9.6 显示了三种存在解析表达式的小波母函数的构造域波形和谱域特征。

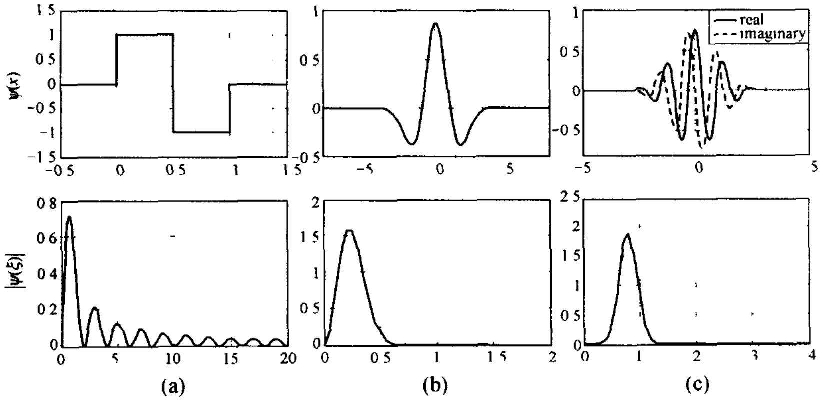


图 9.6　三个小波母函数的例子

(a) Haar 小波；(b) Mexico Hat 小波；(c) Morlet 小波

1. Haar 小波(图 9.6(a))

数学家 Haar 于 1910 提出了一种正交小波函数系，它的小波母函数表示如下：

$$\Psi_H(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<0.5\\ -1, & 0.5\leqslant x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其谱域表达式为

$$\Psi_H(\xi)=\frac{1-2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{\mathrm{i}\xi}$$

Haar 小波不是连续可微函数，谱域的局域性也较差，在实际信号分析中很少采用。但它的结构简单，很方便用来说明问题，因此常用于理论研究。

2. Mexico Hat 小波(图 9.6(b))

Mexico Hat 小波母函数是 Gauss 函数的二阶导数，即

$$\Psi(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

谱域表示为

$$\Psi(\xi)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi^{1/4}\xi^2\mathrm{e}^{-\xi^{-\xi/2}}$$

该小波波形因与墨西哥草帽剖面轮廓线相似而得名，在视觉信息加工和边缘检测方面应用较多，又称为 Marr 小波。

3. Morlet 小波(图 9.6(c))

Morlet 小波是最常用到的复值小波

$$\Psi(x)=\pi^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_0 x}\mathrm{e}^{-x^2/2},\quad \xi_0\geqslant 5$$

$$\Psi(\xi)=\sqrt{2}\pi^{1/4}\mathrm{e}^{-(\xi-\xi_0)^2/2}$$

Morlet 小波在构造域、谱域都具有较好的局域性，是地球物理过程和流体湍流的分析研究中经常使用的小波。

对于任一信号 $f(x)\in L^2(R)$，可以证明 $f(x)$可由小波逆变换精确重构(证明从略，可参考 Daubechies，1992；赵松年，1996)，

$$f(x)=\frac{1}{C_\Psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\Psi_{a,b}(x)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}\tag{9.13}$$

其中 C_Ψ 由式(9.9)定义。与其他积分变换一样，小波变换只有在其逆变换存在的条件下才有实际意义。因此可知小波母函数只有满足了式(9.9)及式(9.11)所定义的小波变换时才有意义。这就是式(9.9)小波容许条件的由来。信号可以通过小波逆变换重构说明信号的小波变换没有损失任何信息，而且变换满足下面的能量关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{C_\Psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|W_f(a,b)|^2\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}\tag{9.14}$$

9.3 离散小波变换

由于尺度因子 a 和平移参数 b 连续取值所对应的小波基本函数 $\Psi_{a,b}(x)$之间不是线性无关的，因而相应的连续小波变换具有高度冗余性。同时，连续小波变换需要大量计算和存储空间，对于二维和

三维情况实现困难。这些性质使连续小波变换主要用于理论分析方面。在实际应用中需要对参数 a 和 b 进行离散化处理，以便在数值上有效地实现小波变换的计算和分析。

对于尺度因子 a 的离散化，通常选取 $a=a_0^j$，$j=0,\pm1,\pm2,\cdots$，其中 a_0 是大于1的固定伸缩步长。而平移参数 b 的离散化则是尺度相关的，$b=ka_0^jb_0$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，$b_0>0$ 且与小波母函数的具体形式有关。此时相应的小波函数为

$$\Psi_{j,k}(x)=a_0^{-j/2}\Psi(a_0^{-j}(x-ka_0^jb_0))=a_0^{-j/2}\Psi(a_0^{-j}x-kb_0),\ j,\ k\in Z$$

调整坐标轴使 kb_0 为整数 k，于是离散化的小波函数表示为

$$\Psi_{j,k}(x)=a_0^{-j/2}\Psi(a_0^{-j}x-k),\ j,\ k\in Z \tag{9.15}$$

相应于连续小波变换定义式(9.11)，信号 $f(x)$ 的离散小波变换定义为

$$W_f(j,k)=\langle f,\Psi_{j,k}\rangle=a_0^{-j/2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\Psi^*(a_0^{-j}x-k)\mathrm{d}x \tag{9.16}$$

离散小波变换是离散的尺度因子和平移参数的函数，是连续小波变换的一个子集。为了能由 $W_f(j,k)$完全重构原信号 $f(x)$，离散小波函数系$\{\Psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$必须满足下述条件：

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j,k\in Z}|\langle f,\Psi_{j,k}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2,\ 0<A\leqslant B<+\infty \tag{9.17}$$

此时称$\{\Psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$构成了一个小波框架，$A$，$B$ 分别称为框架下界和框架上界。而信号 $f(x)$可表示为

$$f(x)=\sum_{j,k\in Z}\langle f,\Psi_{j,k}\rangle\tilde{\Psi}_{j,k}(x) \tag{9.18}$$

其中 $\tilde{\Psi}_{j,k}(x)$称为 $\Psi_{j,k}(x)$的对偶小波，它是某一小波母函数$\tilde{\Psi}(x)$的伸缩平移拷贝，且 $\{\tilde{\Psi}_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$同样构成了一个小波框架。

当框架上、下界 $A=B$ 时，相应的小波框架称为紧框架，且有 $\tilde{\Psi}_{j,k}(x)=\frac{1}{A}\Psi_{j,k}(x)$。而在 $A=B=1$ 的紧框架条件下，$\{\Psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$ 就构成一组正交小波基。在实际中通常采用的是 $a_0=2$ 的二进离散小波，下面我们针对二进小波介绍正交小波变换及其相关的理论。

9.4 正交小波变换和多尺度分析

二进离散小波可表示为

$$\Psi_{j,k}(x)=2^{-j/2}\Psi(2^{-j}x-k),\ j,\ k\in Z \tag{9.19}$$

设 $\Psi_{0,0}(x)=\Psi(x)$，则可以构造出某些类型的 $\Psi(x)$，使得对于任意具有有限能量的信号 $f(x)(f(x)\in L^2(R))$，有

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\langle f,\ \Psi_{j,k}\rangle\Psi_{j,k}(x) \tag{9.20}$$

且 $\Psi_{j,k}(x)$满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_{j,k}(x)\Psi_{j',k'}(x)\mathrm{d}x=\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}=\begin{cases}1,\ j=j',\ k=k'\\0,\quad\text{其他}\end{cases} \tag{9.21}$$

则小波函数系 $\{\Psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$构成了 $L^2(R)$空间的一组标准正交基，相应的离散小波变换称为正交小波变换，满足

$$\sum_{j,k\in Z}|W_f(j,\ k)|^2=\sum_{j,k\in Z}|\langle f,\ \Psi_{j,k}\rangle|^2=\|f\|^2 \tag{9.22}$$

对比式(9.20)与式(9.18)可知，$\Psi_{j,k}(x)$的对偶小波 $\tilde{\Psi}_{j,k}(x)$即为 $\Psi_{j,k}(x)$本身。

根据小波的容许条件$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)\mathrm{d}x=0$可知$\Psi(\xi=0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)\mathrm{d}x=0$，因此 $\Psi(x)$以及 $\Psi_{j,k}(x)$在谱域具有带通特性，相当于中心频率不同的带通滤波器。正如前面已经指出的，小波变换能提供复杂信号在不同尺度上的细节。但 $\Psi_{j,k}(x)$的带通性使其无法兼顾信号“直流”分量($\xi=0$)所反映的恒定不变的轮廓特征。事实上，我们经常遇到的复杂而瞬变的信号都可以看作是慢变低频部分和瞬变高频部分的叠加(图 9.7)，因此既需要采用不同中心频率的带通滤波器，也需要采用不同带宽的低通滤波器来分析这类信号。另一方面，式(9.20)中在$\pm\infty$区间的双重求和意味着在所有尺度上对信号做细化处理，这其实是不必要的。用尺度(层次)的观点分析各种信号时，在超过某一特定尺度(如 j_0)后，细部特征就不再起作用。因此可以采用不同的带通滤波器对信号 j_0 以下各尺度的高频信息进行分析，

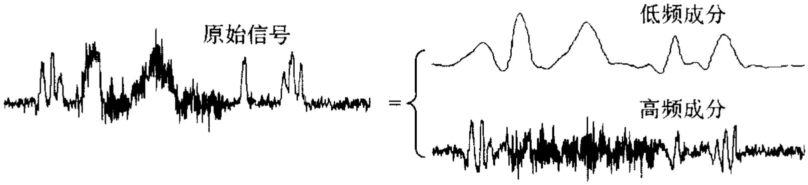


图 9.7　复杂信号可以看作是慢变低频成分和瞬变高频成分的叠加
(原始信号为 Matlab 6.5 软件包中的一个例子)

而应用不同带宽的低通滤波器来提取 j_0 尺度以上的低频信息。类似于 $\Psi_{j,k}(x)$，定义$\varphi_{j,k}(x)$为具有低通特性的基函数

$$\varphi_{j,k}(x)=2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-k),\ j,\ k\in Z \tag{9.23}$$

则式(9.20)可改写为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\langle f,\ \varphi_{j_0,k}\rangle\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j=-\infty}^{j_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\langle f,\ \Psi_{j,k}\rangle\Psi_{j,k}(x) \\ &= P_{j_0}f(x)+\sum_{j=-\infty}^{j_0}Q_jf(x) \end{aligned} \tag{9.24}$$

式中，右边第一项表示被分析的信号 $f(x)$的尺度为 2^{-j_0} 的模糊的像；第二项则是对 $f(x)$所作的不同尺度(从 $2^{-\infty}$ 到 2^{-j_0})的细节补充。Mallat 于 1988 年提出的多尺度分析(Multiresolution Analysis，MRA)方法就是在这一思想基础上发展起来的，并且利用极其简单的变换建立了不同尺度信号分析的内在联系。MRA 的定义如下：

称满足下述条件的 $L^2(R)$函数空间中的一系列子空间$\{V_j\}_{j\in Z}$及一个函数 $\varphi(x)$为一个正交多尺度分析，记为$(\{V_j\}_{j\in Z},\ \varphi(x))$。

① $V_j\subseteq V_{j-1}$，$j\in Z$，即相应于某个尺度的子空间包含了大于该尺度的子空间的全部信息；

② $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j-1}$，即所有子空间是空间尺度化的结果；

③$\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$，$\bigcup_{j\in Z}V_j=L^2(R)$，等价于 $\lim_{j\to+\infty}V_j=0$，$\lim_{j\to+\infty}V_j=L^2(R)$。也就是说，无穷大尺度的子空间毫无函数信息，而随着尺度的减小，子空间中包含的信息越来越多，最终收敛于原函数。

④ $\varphi(x)\in V_0$，且 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$是 V_0 的标准正交基，称$\varphi(x)$是

此多尺度分析的尺度函数。

由以上条件②、④可知，对于任一$f(x)\in V_0$，有$f(x/2^j)\in V_j$，且容易验证，式(9.23)所定义的函数系$\{\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in Z}$构成了$V_j$的一组标准正交基。记$W_j$是$V_j$在$V_{j-1}$中的正交补空间，即$V_{j-1}=V_j\oplus Wj$，$W_j\perp V_j$。如此得到的子空间$\{W_j\}_{j\in Z}$序列显然满足：

① 当m，$n\in Z$，$m\neq n$时，有$W_m\perp W_n$；

② $V_{j-1}=V_{j+s}\oplus W_{j+s}\oplus W_{j+s-1}\oplus W_{j+s-2}\oplus\cdots\oplus W_{j+1}\oplus W_j$，$s\in Z^+$

令$s\to+\infty$，则$V_{j-1}=\bigoplus\limits_{m=j}^{+\infty}W_m$；令$j\to-\infty$，得到$L^2(R)=\bigoplus\limits_{m=-\infty}^{+\infty}W_m$

称V_j为尺度为j的尺度空间；W_j为尺度为j的小波空间或V_j在V_{j-1}的细节空间。

由上述过程可知，由$\{V_j\}_{j\in Z}$可确定$\{W_j\}_{j\in Z}$。可以证明，W_j中的函数也有类似于以上条件(2)的伸缩变换特点，即$f(x)\in W_j\Leftrightarrow f(2x)\in W_{j-1}$。因此，只要找到$W_0$的标准正交基，就可确定$W_j$的标准正交基。在MRA中，可通过一定的关系由尺度函数$\varphi(x)$确定一个小波函数$\Psi(x)$，其平移系$\{\Psi(x-k)\}_{k\in Z}$构成W_0的标准正交基，而相应的小波函数系$\{\Psi_{j,k}(x)\}_{k\in Z}$则构成$W_j$的标准正交基。这一过程中最重要的关系是尺度函数$\varphi(x)$和小波函数$\Psi(x)$所满足的双尺度方程，其表述如下(证明从略)：

设$(\{V_j\}_{j\in Z},\varphi(x))$是$L^2(R)$的一个多尺度分析，则有$\{h_n\}_{n\in Z}$，使

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n\in Z}h_n\varphi(x-n) \tag{9.25}$$

设$\{W_j\}_{j\in Z}$是相应的小波空间，若$\Psi(x)\in W_0$，则有$\{g_n\}_{n\in Z}$，使

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n\in Z}g_n\varphi(x-n) \tag{9.26}$$

式(9.25)和式(9.26)即为双尺度方程。令$H(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n\in Z}h_n e^{-\imath n\xi}$，$G(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n\in Z}g_n e^{-\imath n\xi}$，则双尺度方程的谱域形式为

$$\Phi(2\xi)=H(\xi)\Phi(\xi) \tag{9.27}$$

$$\Psi(2\xi)=G(\xi)\Phi(\xi) \tag{9.28}$$

其中 $\Phi(\xi)$为 $\varphi(x)$的谱函数。当小波函数 $\Psi(x)$满足式(9.26)、式(9.28)时，其平移系$\{\Psi(x-k)\}_{k\in Z}$构成 W_0 的标准正交基的充要条件是

$$H(\xi)G^*(\xi)+H(\xi+\pi)G^*(\xi+\pi)=0 \tag{9.29}$$

$$|G(\xi)|^2+|G(\xi+\pi)|^2=1 \tag{9.30}$$

可以证明，当取

$$G(\xi)=\mathrm{e}^{-i\xi}H^*(\xi+\pi)(\text{或 } g_n=h_{1-n}^*(-1)^{1-n},\ n\in Z) \tag{9.31}$$

时，式(9.29)和式(9.30)同时成立，而与 $G(\xi)$(或$\{g_n\}_{n\in Z}$)对应的$\Psi(x)$的伸缩平移系$\{\Psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$就构成了 $L^2(R)$的标准正交基。

从多尺度分析($\{V_j\}_{j\in Z}$，$\varphi(x)$)求得 $L^2(R)$的正交小波基的步骤概括如下：

(1) 由 $\varphi(x)$及式(9.25)或式(9.27)确定$\{h_n\}_{n\in Z}$或 $H(\xi)$；

(2) 由式(9.31)确定$\{g_n\}_{n\in Z}$或$G(\xi)$；

(3) 由式(9.26)或式(9.28)确定 $\Psi(x)$。

图 9.8 显示了几种常用的尺度函数和小波函数，以及各自的谱域特征。详细信息可参考 Daubechies(1992)。

基于如此构造的尺度函数系$\{\varphi_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$和小波函数系$\{\Psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in Z}$而建立的函数表示式(9.24)称为小波多尺度(多分辨)，其中

$$P_{j_0}f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\langle f,\varphi_{j_0,k}\rangle\varphi_{j_0,k}(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}S_f(j_0,k)\varphi_{j_0,k}(x) \tag{9.32}$$

为函数 $f(x)$在尺度为 j_0 的尺度空间 V_{j_0} 的近似表示，

$$Q_jf(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\langle f,\Psi_{j,k}\rangle\Psi_{j,k}(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}W_f(j,k)\Psi_{j,k}(x) \tag{9.33}$$

则给出尺度为 j ($j\leqslant j_0$) 的小波空间 W_j 的小波扩展。由于 j_0 是任意的，因此式(9.24)又可写成

$$\begin{aligned}f(x)&=P_{j_0}f(x)+\sum_{j=-\infty}^{j_0}Q_jf(x)=P_{j_0}f(x)+Q_{j_0}f(x)+\sum_{j=-\infty}^{j_0-1}Q_jf(x)\\&=P_{j_0-1}f(x)+\sum_{j=-\infty}^{j_0-1}Q_jf(x)\end{aligned} \tag{9.35}$$

于是有

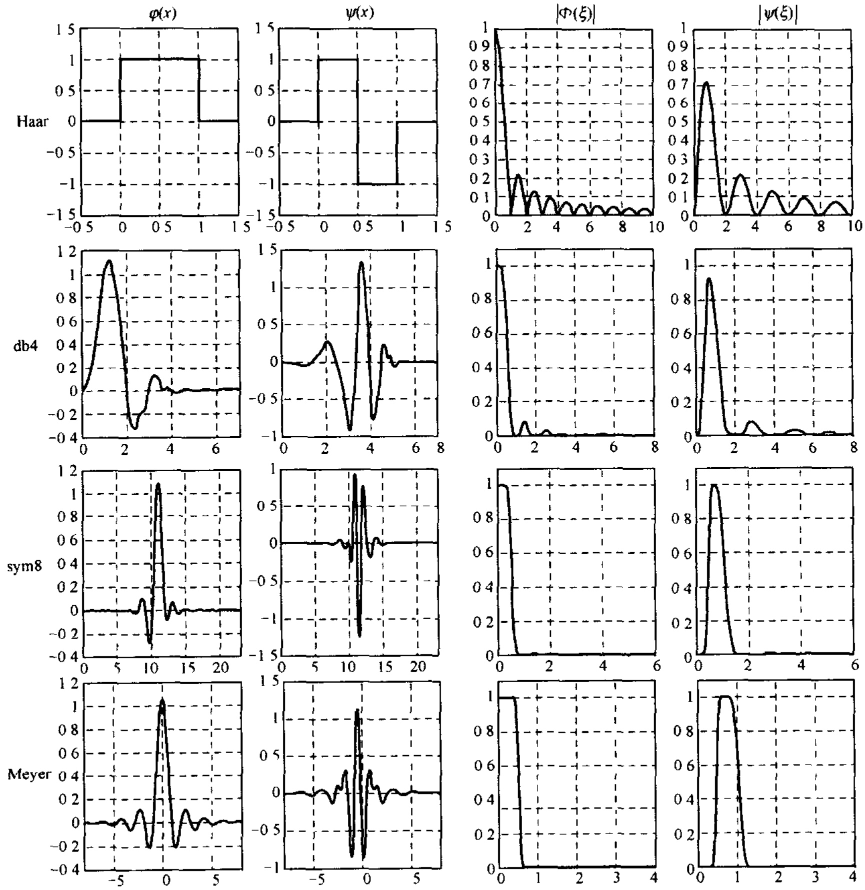


图 9.8　几种常用的尺度函数和小波函数

$$P_{j_0-1}f(x)=P_{j_0}f(x)+Q_{j_0}f(x)=P_{j_0+1}f(x)+Q_{j_0+1}f(x)+Q_{j_0}f(x)=\cdots \tag{9.36}$$

式(9.36)刻画了正交小波分解的基本结构。正像多尺度分析中所提到的信号 $f(x)$在任一尺度空间 V_j 的信息 $P_jf(x)$包含了尺度大于 j 的有关 $f(x)$特征的全部信息。对于下一个更小的尺度 $j-1$，需要在 $P_jf(x)$基础上增加小波空间 W_j 中的细节 $Q_jf(x)$，才能得到 $f(x)$在相应空间(V_{j-1})中的信息。因此，$f(x)$在小波空间 W_j 的小波扩展 $Q_jf(x)$刻画了该函数在两个不同尺度(不同分辨率)j 与 $j-1$ 的差别。一个典型的例子如图 9.9 所示。

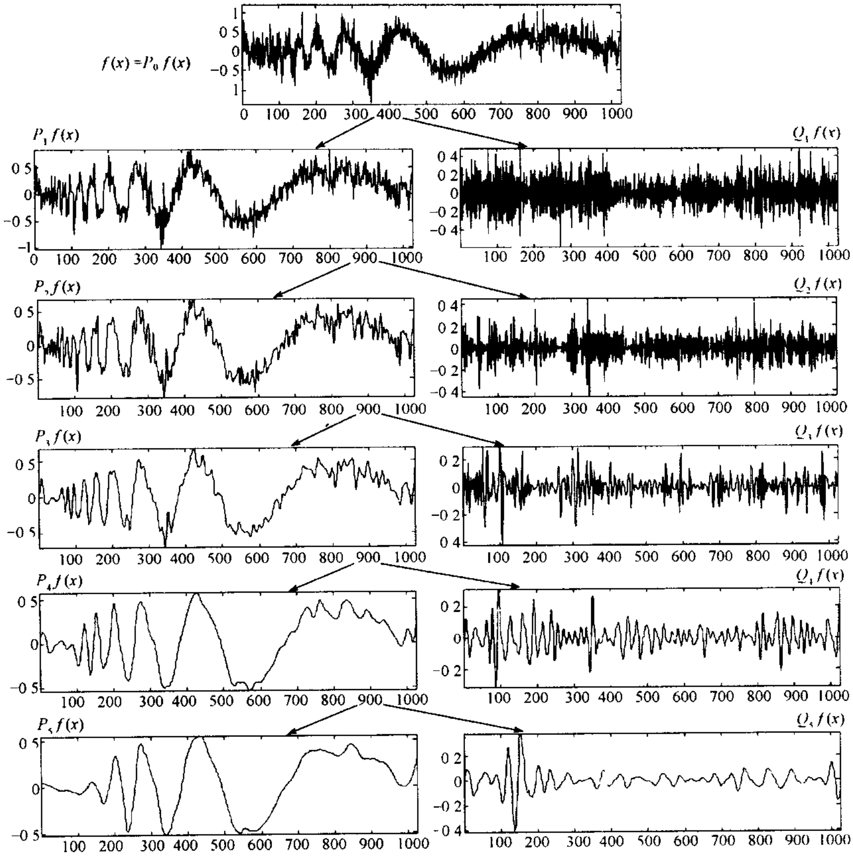


图 9.9　二进正交小波分解的基本结构

其中 $P_j f(x)$ 为函数 $f(x)$ 在尺度为 j 的尺度空间 V_j 的近似表示，$Q_j f(x)$ 为函数 $f(x)$ 在尺度为 j 的小波空间 W_j 的小波扩展(细节)(信号为 Matlab 6.5 软件包中的一个例子)

9.5　小波包分析

上一节介绍的基于小波变换的 MRA 本质是将尺度空间 V_j 进行了分解，而没有对小波空间 W_j 进行进一步的分解(图 9.10(a))。这种做法的结果是提取了被分析信号分辨率随尺度变化的特征信息：大尺度时具有较低的构造域分辨率而较高的谱域分辨率；小尺度则相反，得到了信号构造域的精细结构，但相对模糊的谱域分布(图 9.10(b))。

对大多数非平稳信号而言，MRA 是符合其双域分布规律的，即小尺度信号通常包含许多高频成分，对应较大的频谱窗口；而大尺度信号通常只包含低频成分，分布在较窄的频谱范围内。但在某些情况下，如信号兼有平稳和非平稳特征时，同样需要在高频端采用较小的谱域窗口，以获取更精确的谱域定位。这可以通过对尺度空间 V_j 和小波空间 W_j 同时进行分解的小波包分析来完成(图 9.10(c)、(d))。此外，在小波包基础上的最佳基分解进一步提供了一种经济有效的信号表示方法。

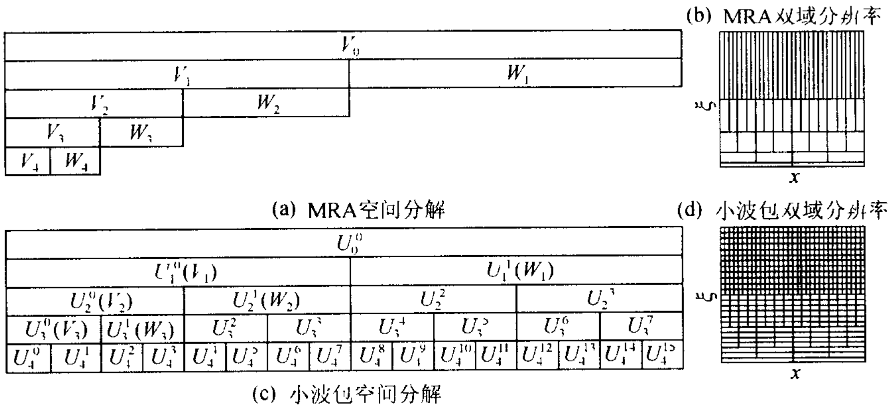


图 9.10　小波包分解与 MRA 的对比

对满足双尺度方程式(9.25)和式(9.26)的尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\Psi(x)$ 采用另一种符号：$u_0(x)=\varphi(x)$，$u_0(x)=\Psi(x)$，而双尺度方程变成

$$u_0(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} h_n \varphi(2x-n) \tag{9.37}$$

$$u_1(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} g_n \varphi(2x-n) \tag{9.38}$$

则称由公式

$$u_{2k}(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} h_n u_k(2x-n) \tag{9.39}$$

$$u_{2k+1}(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in Z} g_n u_k(2x-n) \tag{9.40}$$

所定义的函数集合 $\{u_m(x)\}_{m=0,1,2,\cdots}$ 为由 $u_0(x)=\varphi(x)$ 确定的小波包。对多尺度分析中尺度空间 V_j 和小波空间 W_j 的定义加以推广，

可将 $L^2(R)$ 函数空间分解为一系列子空间 $\{U_j^m\}_{j,m\in Z}$，其中 U_j^m 是由函数系 $\{u_{j,k}^m(x)=2^{-j/2}u_m(2^{-j}x-k)\}_{k\in Z}$ 的线性组合生成的，即 $\{u_{j,k}^m(x)\}_{k\in Z}$ 构成 U_j^m 的标准正交基。显然有 $U_j^0=V_j$，$U_j^{-1}=W_j$ 且

$$U_j^m=U_{j+1}^{2m}\oplus U_{j+1}^{2m+1},\qquad j\in Z \tag{9.41}$$

图 9.10(c)为这种空间分解的结构图。与图 9.10(a)的正交小波多尺度分解类似，每一层的各子空间是相互正交的，分别代表不同的频谱区间。下一层各子空间的频谱带宽分别为上一层相应子空间频谱带宽的一半。不同之处在于，小波包分解将高频子空间和低频子空间同时分解，因而可以达到对高频谱域局域化的目的。图 9.10(d)所显示的构造-谱双域分辨率对此给出了很好的说明。

小波函数集合 $\{u_{j,k}^m(x)\}_{j,k,m\in Z}$ 被称为 $L^2(R)$ 空间的小波库，而称从小波库中抽取的能组成 $L^2(R)$ 的一组标准正交基为一个小波包基。对于固定的 j，$\{u_{j,k}^m(x)\}_{k,m\in Z}$ 构成 $L^2(R)$ 的一个正交小波包基，它对应的 $L^2(R)$ 分解为 $L^2(R)=U_j^0\oplus U_j^1\oplus\cdots\oplus U_j^{2^j-1}$，且这组基

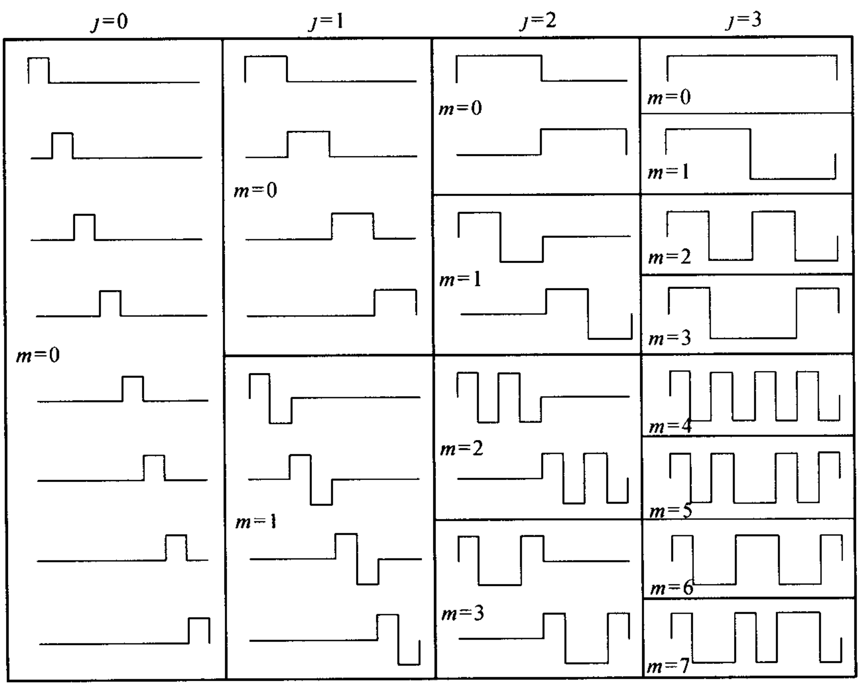


图 9.11 Haar 小波包

有类似于 WFT 的性质。当 $u_0(x)$为 Haar 小波的尺度函数时，$j=0$，1，2，3 的与图 9.10(c)对应的 Haar 小波包基函数显示于图 9.11 中。小波包基还可以由相互正交的具有不同 j 的小波函数族组成。图 9.12 给出了几种不同小波包基组合的树形结构。显然，可以采用任何一个小波包基来分解或表示信号。也就是说，信号的小波包分解方式不惟一，因此就需要从众多的小波包基中选出对所分析的信号最合适(最佳)的基。在小波包分析中，最佳基是以信号在不同基下能量的集中程度作为衡量标准来选取的，直观来说，能量越集中，表明相应的基越适于分析该信号。作为简单的例子，图 9.13 分别显示了采用 db8 小波包分解对一个地震信号图 9.13(b)和一个声音信号

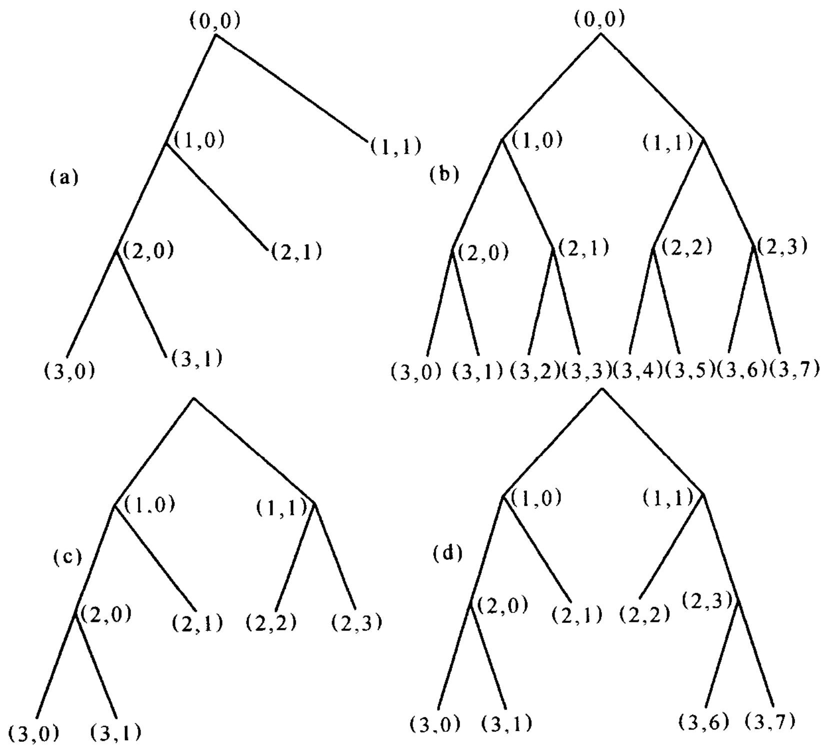


图 9.12 以树形结构表示的几种不同的小波包基组合方式

树结构中的节点(j, m)代表 U_j^m 空间，每一最底层的节点组合成一个小波包基。

(a) MRA 小波分解：小波包基的特例；(b) 具有相同尺度(相同 j)的小波包基；

(c)、(d)为介于(a)、(b)之间的其他两种小波包基

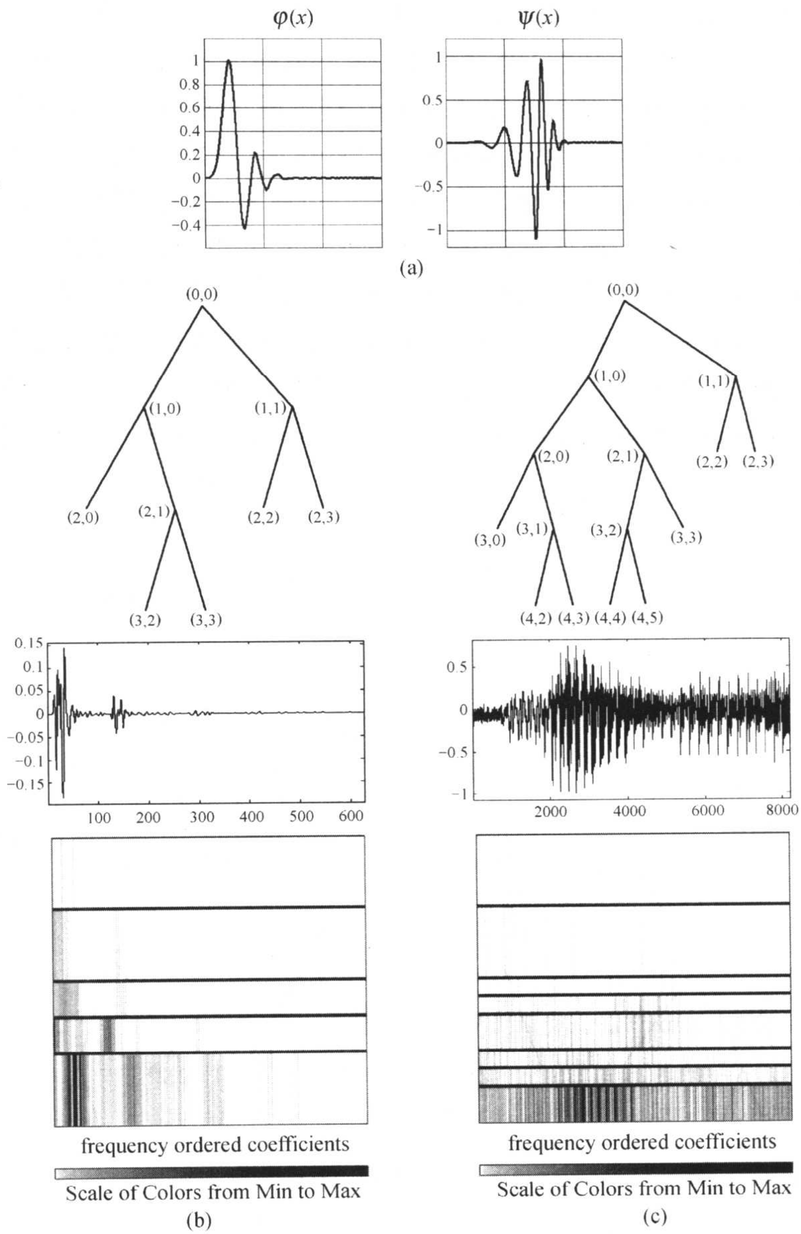


图 9.13　最佳小波基树形分布以及小波包分解系数在相平面中的能量分布

(a) db8 尺度函数和小波函数；(b)、(c)：采用 db8 小波包分解得到的一个地震信号(b)和一个声音信号(c)的最佳小波基树形分布以及小波包分解系数在相平面中的能量分布

图 9.13(c)采用 shannon 熵(Entropy)原则得到的最佳小波基树形分布以及小波包分解系数在相平面中的能量分布。这里对最佳小波包基的选取过程不做详细说明，感兴趣的读者可参考 Coifman and Wickerhauser(1992)；Mallat(1998)等相关文献。

9.6 小波分析在分形研究中的应用

小波函数族的伸缩平移自相似性使得小波分析方法成为研究分形现象的一个非常有效的工具。从简单的分维测量到复杂的多标度连续谱的确定都可以在小波变换的理论框架下得以完成。而小波窗口大小的自适应性，特别是最佳小波包基分解的应用，使同时获取复杂分形体在构造-谱双域的最理想分辨率，得到其内部精细结构的完整描述成为可能。本节将简要介绍采用小波分析研究分形的原理，并通过几个典型例子来加以说明。

1. 分形信号 Hurst 指数的确定

从理论上可以证明，分形信号的小波变换具有自相似性。例如，对于一个自仿射分形

$$f(ax)=a^{H}f(x) \tag{9.42}$$

其小波变换 $W_f(a, b)$满足

$$W_f(a, b)=a^{H+1/2}W_f\left(1, \frac{b}{a}\right) \tag{9.43}$$

小波变换的这种在平移和伸缩下的自相似性还意味着其模$|W_f|$的极大值在 a，b 构成的相空间中的位置和取值也是自相似的。以 5.1 节中介绍的魔鬼台阶曲线为例，图 9.14 显示了该曲线的小波变换模在相空间中的分布以及极大值的位置。两者均表现出与曲线类似的自相似性。因此可以通过小波变换的特征分析来研究简单分形信号的分形特性，确定其分维。

对于一个简单分形信号，一个常数分维 D 就足以描述其分形特征。由式(5.13)可知，自仿射 FBM 的分维和 Hurst 指数之间存在关系：$D=2-H$。在实际研究中，经常会碰到分维和随时间(空间)变

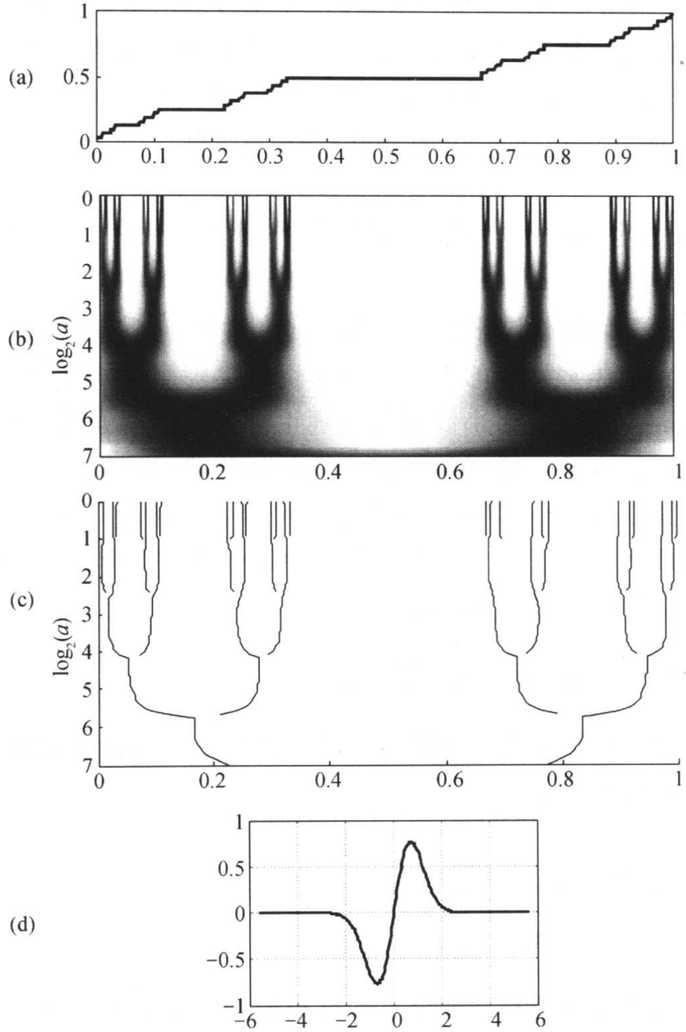


图 9.14　魔鬼台阶曲线的小波变换模在相空间中的分布以及极大值的位置

(a) 魔鬼台阶曲线；(b) 的小波变换模在相空间中的分布；(c) 极大值的位置；

(d) 所采用的小波函数为 Gauss 函数的一阶导数(修改自 Mallat，1998)

化的时间序列或空间分布。具有 $D(x)=2-H(x)$形式的广义 FBM (GFBM)通常被应用于这类问题的研究中，而小波变换的双域局域特性对于确定变化的 $H(x)$起到了至关重要的作用。同 FBM 类似，GFBM 具有以下两个性质：

$$
\left.\begin{aligned}
&E(B_H(x))=0\\
&D(B_H(x_2)-B_H(x_1))\sim(x_2-x_1)^{2H(x')}
\end{aligned}\right\}
$$

其中 $H(x')$ 反映了 $[x_1, x_2]$ 上的分形特征。相应地，GFBM 的小波变换满足(Zhao *et al.*，2004)

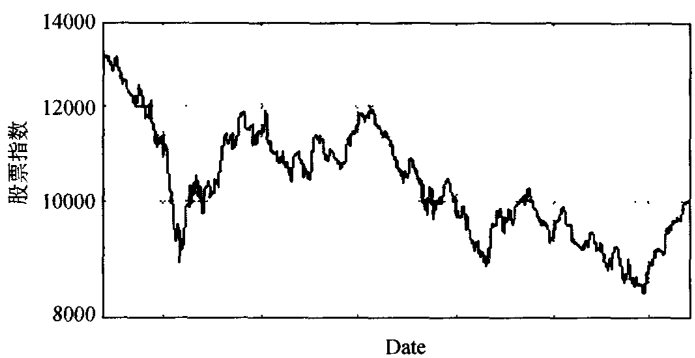
$$
E(|W_{B_H}(a, x)|^2)\sim a^{2H(x)+1} \tag{9.44}
$$

对于一系列的尺度 a_j，令 $y_j=y_x(a_j)=\lg|W_{B_H}(a_j, x)|^2$，$c_j=c(a_j)=\lg a_j$，$j=1, 2, \cdots, n$，则基于最小二乘法确定的 Hurst 指数为

$$
\hat{H}(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}(c_j-\bar{c})(y_j-\bar{y})}{\sum_{j=1}^{n}(c_j-\bar{c})^2}-1\right] \tag{9.45}
$$

如此得到的 Hurst 指数与真实值符合很好(侯建荣，2002)。图 9.15 显示

(a)



(b)

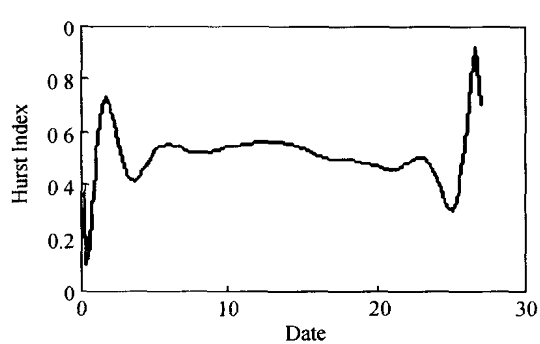


图 9.15

(a) 股票市场的一条 HSI 曲线；(b) 采用 db4 小波函数得到的图 Hurst 指数的时间变化图(摘自 Zhao *et al.*，2004)

了采用上述小波变换方法对股票市场的一条 HSI 曲线进行 Hurst 指数估计的结果。随时间变化的 Hurst 指数很好地反映出曲线的非平稳性。这种基于小波变换研究 Hurst 指数时变特性的方法可以进一步用于不同非平稳过程特征分析和相似性判别中(Zhao *et al.*，2004)。

2. 多重分形的奇异谱(Singularity Spectrum)

Hurst 指数的时间变化给出了分形体在构造域的特征描述，而第六章从分布概率的角度引入的多重分形的多标度连续谱(即奇异谱)和广义分维的概念则相当于从谱域角度分析分形体的内部结构。对于由不同分形行为的子集叠加而成的具有非均匀分维分布的复杂奇异集合，小波变换不仅反映了其构造域的局部变化特性，而且可以用于直接提取其整体分形结构的谱域信息。

对于一个多重分形，其小波变换存在一些模极大值，且有

$$|W_f(a,\ b)| \sim a^{\alpha+1/2} \tag{9.46}$$

其中 α 即为式(6.1)定义的局部奇异指数。值得注意的是，只有当采用的小波函数具有 $N>\alpha$ 阶消失矩(定义见式(9.8)时式(9.46)才成立。因此，被分析信号的奇异度越大，用于小波变换的小波函数就需要具有越高阶的消失矩。令 $\{b_l(a)\}_{l\in Z}$ 为尺度 a 所对应的 $|W_f(a,\ b)|$ 极大值点的位置，类似于式(6.2)，这些极大值点的个数满足

$$N_\alpha(a) \sim a^{-f(\alpha)} \tag{9.47}$$

其中 $f(\alpha)$ 即为多重分形的奇异谱，表示具有奇异度 α 的子集的分形维数。定义分割函数(partition function) S

$$S(q,\ a) = \sum_l |W_f(a,\ b)|^q \sim a^{\tau(q)} \tag{9.48}$$

来替代式(6.3)中的函数 $x_q(\varepsilon)$，则根据式(9.46)和式(9.47)，

$$S(q,\ a) \sim \int a^{q(\alpha+1/2)-f(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \tag{9.49}$$

按照同式(6.5)类似的推导过程，可得

$$\tau(q) = \min(q(\alpha+1/2) - f(\alpha)) \tag{9.50}$$

在实际计算中，指数函数 $\tau(q)$ 可以由分割函数值计算得到，通常需要确定的是奇异谱 $f(\alpha)$。已经证明，当奇异谱 $f(\alpha)$ 为凸函数

$\left(\frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2}<0\right)$，有

$$f(\alpha)=\min_{q\in R}(q(\alpha+1/2)-\tau(q)) \tag{9.51}$$

上式不仅适用于奇异谱满足凸函数要求的自相似信号(Jaffard，1997)，而且对大多数多重分形都成立(Mallat，1998)，如5.2节介绍的分数Brown运动。需要指出的是，当$f(\alpha)$不是凸函数时，式(9.51)给出的只是$f(\alpha)$的上限，而不是$f(\alpha)$本身(Jaffard，1997)。另外，上述式(9.46)、式(9.49)以及式(9.50)与6.2节中的相应公式非常相似，只是在指数上多了1/2，这是由小波函数本身的自仿射伸缩变换引入的。

基于小波变换的多重分形奇异谱的计算步骤归纳如下：

(1) 选取适当的小波函数，计算小波变换$W_f(a, b)$并选出其在每一尺度的模极大值点；

(2) 由式(9.48)计算分割函数$S(q, a)$；

(3) 采用线性回归计算指数函数$\tau(q)$：

$$\log_2 S(q, a)\approx\tau(q)\log_2 a+C(q);$$

(4) 由式(9.51)计算奇异谱$f(\alpha)$。

图9.16给出了以此步骤得到的多重分形奇异谱的一个例子。被分析的多重分形的生成过程与魔鬼台阶曲线类似，只是物质在[0，1/3]和[2/3，1]两个区间上的密度不同，由原来的3/2分别变为1/5和4/5，而进一步收缩的子区间密度也相应地按此比例改变。由此得到的密度积分曲线如图9.16(a)所示。采用与图9.14相同的小波函数进行小波变换，得到了不同q值对应的$\log_2 S(q, a)\sim\log_2 a$关系曲线(图9.16(b))。计算得到的$\tau(q)$和$f(\alpha)$分别显示于图9.16(c)、(d)中。可以看到，$f(\alpha)$与理论值相当符合。

3. 小波包分形分析

前面两部分均是采用一般的小波变换来研究分形信号或函数的。小波变换在信号分辨率，尤其是高频端的分辨率上具有一定的局限性。小波包分析及最佳基分解技术有效克服了这一缺陷，因而被越来越多地应用于复杂过程和现象的分形特征分析中(Vicsek，1992；

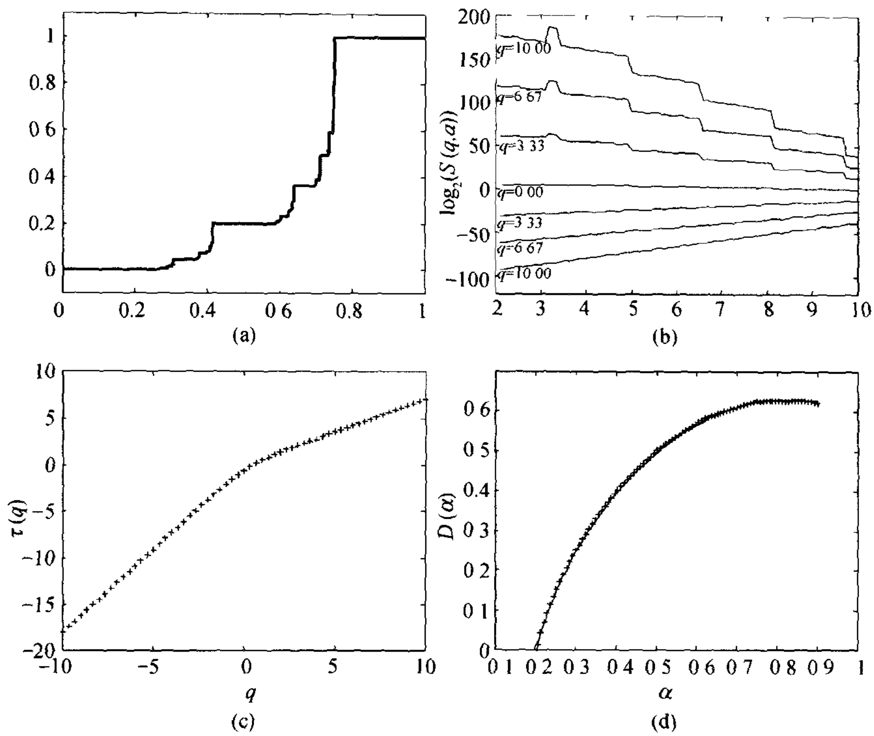


图 9.16　小波变换的多重分形奇异谱

(a) 类似于魔鬼台阶的多重分形曲线；(b) 不同 q 值对应的分割函数 $S(q, a)$；(c) 由 $S(q, a)$计算得到的指数函数 $\tau(q)$；(d) 由 $\tau(q)$计算得到的奇异谱 $f(\alpha)$。实线为理论值(采用 http://www-stat.stanford.edu/~wavelab 网页的 WaveLab 软件绘图)

Jones，1996；Jones and Jelinek，2001)。

对于简单的分形信号，可以通过对最佳小波包基分解系数的统计分析来估计其全局 Hurst 指数或分维。记最佳小波包基分解系数为 C_n^m，其中 n 代表位置，m 代表尺度。将 C_n^m 按其能量大小重新排列成为一个 1 维数组 $\{C_n^m : C_1 \geqslant C_2 \geqslant \cdots \geqslant C_{\text{cut-off}} > 0\}$，其中 $C_{\text{cut off}}$表示在精度范围内能够重构原信号的所采用的最小系数。相应地产生一个记录系数指标位置的整型数组 N：$\{N_1, N_2, \cdots, N_{\text{cut-off}}\}$。则具有一定能量的最佳小波包基系数的数目满足下面的统计关系：

$$N_r(C_n^m > N) \propto N^{-\delta} \approx N^{-(H+1)} \tag{9.52}$$

于是可以从 $\lg N_r \sim \lg N$ 曲线的斜率($-\delta$)得到 Hurst 指数 H

$$H = \delta \sim 1 \tag{9.53}$$

Jones 等(Jones，1996a；Jones *et al.*，1996；Jones and Jelinek，2001)应用这种小波包分析方法对丝状真菌的二维分形生长特征进行了研究并计算出相应的全局 Hurst 指数。图 9.17 显示了其中的一个例子。

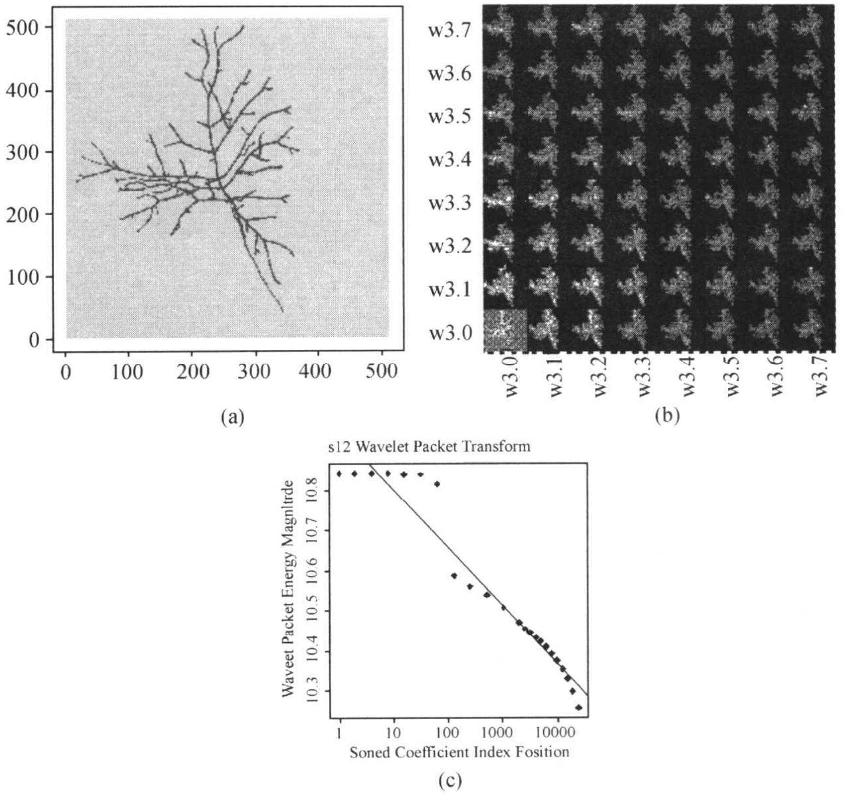


图 9.17 二维图像的小波包分析及全局 Hurst 指数的计算

(摘自 Jones，1996a)

(a) 在包含 0.2%粉状报纸和 2%纤维二糖的介质中生长了 24 小时的 Pycnoporus cinnabarinus 群；(b) 三层 sym 12 小波包分解系数矩阵，灰白色代表能量最高的系数；(c) 最佳小波包基系数的 $\lg N_r \sim \lg N$ 关系，由拟合的曲线斜率得到的全局 Hurst 指数

小波包分析同样可以用于估计多重分形的局部 Hurst 指数(Jones，1996b)，其具体过程与全局 Hurst 指数的计算类似，只是

对不同局部位置的最佳小波包基系数分别应用式(9.52)和式(9.53)，这里对此不再详述。

以上介绍了小波理论应用于分形研究中的几个方面。事实上，小波分析的实际应用远远不止这些，它已经同分形编码技术紧密结合起来，共同在生物、医学、地球科学、气象等众多科学领域发挥着重要作为，成为研究充满分形的自然界和人类社会的有效工具。

第十章　分形和计算机

在计算机时代之前，一些科学家(甚至包括 Julia 图形集的缔造者 Julia，1918)虽然知道可能存在类似于 Koch 曲线等的一类新图形，但他们都缺少制作这种图形的科学工具。有了计算机，才使 Mandelbrot 绘制出千奇百怪的分形图形，才使分形几何这种探索性几何学成为现实成为“大自然的几何学”。如果说贫乏的经济学知识没有妨碍 Mandelbrot 从对棉花价格数据的研究中获得认识自然界混沌变化之谜的灵感，那对数学和计算机的精通则使 Mandelbrot 最终步入了分形科学的殿堂，并开创了 20 世纪数学的重要阶段。把一生收集的关于大自然与数学的历史的许多观点汇集成书，Mandelbort 在学术之路上取得了十分精彩的记录，他变成了科学报告中的一个明星。他的名字随着他的“分形”概念，《大自然的分形几何学》、《分形、组成、机遇》和《维数》等著作的流传而为社会上不仅是数学家，而且是非科学界的许多人所知晓，这在很大程度上是由于他在计算机上展示的分形图片的美丽和绚烂多彩。可以说，Mandelbrot 的成功离不开计算机技术的发展，特别是与分形几何学共同发展的计算机图形显示技术功不可没。

20 世纪 90 年代以后，计算机发展得如此之快，其精确度足以做出丰富多彩的集合图案，越来越多的人们开始以计算机为工具，展开了探索分形图案内在规律性的研究，这无疑将会极大地推动分形几何学的进一步发展。配合前面章节介绍的分形理论，引入一套分形图形软件，展示计算机生成分形图形的基本原理，激发读者亲自动手创造分形，研究分形的兴趣，正是本章的目的所在。

10.1 分形与计算机

自然界景物形态复杂、不规则，这使得采用传统的几何工具进行描述遇到了极大的困难。在计算机制图被广泛应用于分形之前，分形学者只能通过猜测、推断等方法，来描述和推广自己的思想，而无法将最终的结果展现在世人的面前，可谓是“不识庐山真面目，只缘身在此山中”。

要把那些简单的分形图形描画出来，就必须不厌其烦地反复进行相似性操作，以手工方式进行这种单一作业的话，一定会令人神志昏迷，但所幸的是计算机愉快地接受了令我们讨厌的工作，用计算机的设计语言能领略到魅力无穷的分形世界。

例如，出现在复数平面上的 Julia 集合、Mandelbrot 集合是数学世界中描画出最奇妙最美丽的图样之一，无边无垠、错综复杂的轮廓显示着分形特有的自相似性，各部分隐藏在和全体一样的结构中，一放大则其整体形象就浮现出来，这种不可思议的图样用手工是不可能做出来的，而只有在借助了计算机的作图技术之后，才有了这种形式的美。

又如 IFS 迭代，如果没有计算机来完成复杂的迭代工作，我们无法用手工绘制出吸引子，甚至无法想像出吸引子的图形到底是什么样子(如图 10.1 所示)。

绘图是一件大事，艺术家先于数学家发明了投影。工程图离不开欧几里德几何的框架，据说那是因为欧氏几何表现的东西才是“真”的。那么，什么是“真”? 任何图示，除了它自身而外，恰好因为它并不是“真”的才有价值。传统的数学支持了工程绘图，分形几何的诞生使绘图的范围大大扩展。现在可以绘制出真实感很强，且有很高层次精细结构的分形山、云、树等等，这是传统的几何学无能为力的。

有人说，混沌与分形是过程的科学，而不只是状态的科学；是演化的科学，而不只是存在的科学。对过程和演化的模式与仿真，

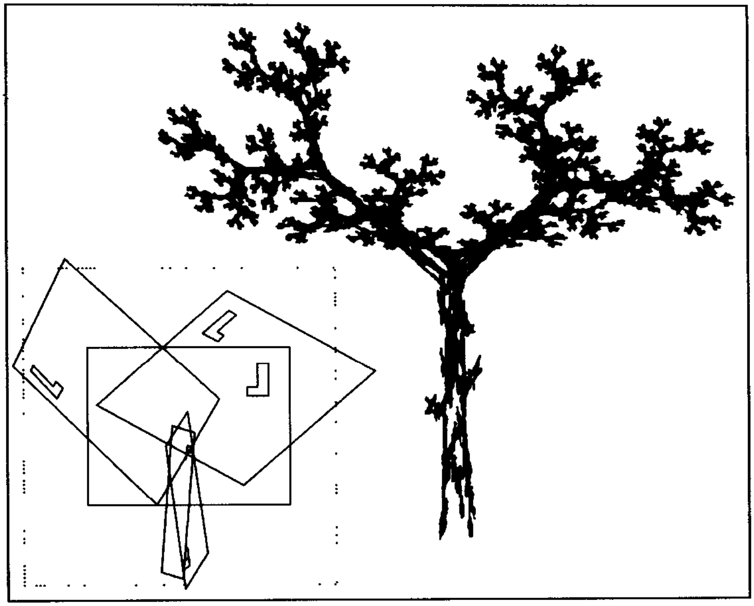


图 10.1 由 IFS 迭代产生的分形树

就今天的认识而言，它离不开计算机。

计算机绘制美丽的分形图形，为分形的发展开拓了一个广阔的天空。用计算机模拟是基于分形的基本理论，但是设计复杂的分形图的计算机程序也给予人创造性的灵感，用计算机绘出的千奇百怪、令人叹服的分形图又为理论的研究提供了最直观的形象，大大的促进了分形科学的发展，也带动了许多古老学科的新生，例如复变函数这门学科多年来停滞不前，直至计算机制图充分显示了 Julia 集的复杂结构，才使这门学科的数学理论取得了巨大的进展。

计算机处理图形的技术进步，极其有力地促进了对分形的研究。今天，人们能“身临其境”地进入 Mandelbrot 集合及 Julia 集合，去体会如此复杂的精细结构，这是计算机的功劳。通过计算机制作的动态画面包含更高数量级的视觉信息，引起人们更深入的思维活动和更丰富的联想。

分形作为新兴交叉学科，不仅理论研究日益深入，而且应用范围日趋广泛。由 Mandelbrot 所建立的分形几何学，从它诞生开始

便注定将与计算机图形学结下不解之缘。从引人入胜的 Mandelbrot 集到自然景观的计算机仿真，分形之美风靡全世界。20 世纪 80 年代以来，分形学又渗透到图形处理、模式识别、人工智能以及非线性电路等信息科学的许多分支。例如，分形作为自然物体的描述模型，分维作为图像模式的形态特征已用于图形分析与模式分类、图像生成、内插与计算机仿真、信号滤波、图像压缩编码、分形神经网络，乃至于非线性混沌电路的研究中。

10.2 分形与艺术

分形加计算机，现在“侵入”艺术领地，使这个学科的交叉范围跨得是大了一点，引起争议与异议是必然的。说来不奇怪，科学与艺术从来就不是严格分家的，是融合的关系，是分工的区别而已。艺术强调思想，表达思想要靠技巧，技巧的实现要靠工具。这“工具”往往是数学的、物理的、化学的、电子学的等等。水墨丹青附着的宣纸，产生了浸润渲染和飞白写意效果；而丙烯涂料，可表现明亮光感；一种特制的喷笔，使雾状的点集轻易地盖在画纸上。今天的科技进步向艺术家奉献了一部计算机，这是个与往常的任何工具都不可同日而语的新工具。

分形艺术(Fractal Art)(FA)到目前为止约有 15～20 年的历史，它第一次引起公众注意的是《科学美国人》1985 年刊登的关于 Mandelbrot 集的一篇文章，自那以后，分形在表现形式和分形几何的理解等方面得到许多进展，也许，现在恰好到了规定和表述什么是分形艺术，什么不是分形艺术的时候了。

分形艺术是一种关于分形——在所有的尺度上用自相似(图形的部分与整体相似)描述的形状或集合，并具有无限细节结构的流派。分形是计算机利用反复的数字处理的一个典型的实例，有些图像不是专门的分形，但由于利用了相同的基本生成源和生成步骤，而被纳入到分形艺术世界中。

分形艺术是可视艺术的子类，在许多被人关注的方面类似于摄

影——一个被怀疑论者称之为另类艺术的艺术。分形图像作品一般是通过打印机来展现的，分形艺术家已深入到画家、摄影师和打印师之中。分形自然是一种电子图像，但它很快地被一些视觉艺术家们所接受，从而促使他们进入分形艺术的数字王国。

分形艺术是：

(1) 表现。通过画家的颜色、摄影师的光影或舞蹈演员的动作，艺术家学习表现和唤起所有思想和情感的方式。分形艺术家不缺乏用他们的媒体语言来表现的能力，同样地，他们被整个装入所有传统艺术家可能使用的工具中。

(2) 创造。决定性的分形图像必然被建立，就像照片或绘画一样，他们能够创作出有表现力的作品和抽象的基本分形形式，或类似于非写实主义的碎片。分形艺术家具有一个空白的“油画布”，并且创立一个图像，产生颜色、结构、平衡等由传统的可视艺术家所使用过的一些基本原理上的和谐。

(3) 输入的需要、努力尝试和智慧。分形艺术家必须管理参数公式、映射、着色方案、调色板和他们的必需的参数的集合。各自的且每一个组成部分，能够并将调整了的、对齐的和反复用力拉的组合图，自主操作所有这些分形图的平面带来了对理解他们的应用和他们的财物的责任，这些理解需要来自艺术家的智慧和沉思。

总之，分形艺术是分形学家简单地创建出来的艺术。分形艺术是数学家的探索和艺术家的创造相结合的产物。

分形作为一种全新的概念，使许多人在第一次见到分形图形时都有新的感受，不管你是从科学的观点看还是从美学的观点看。分形图可以体现出许多传统美学的标准，如平衡、和谐、对称等等，但更多的是超越这些标准的新的表现。比如，分形图中的平衡，是一种动态的平衡，一种画面各个部分在变化过程中相互制约的平衡；分形图的和谐是一种数学上的和谐，每一个形状的变化，每一块颜色的过渡都是一种自然的流动，毫无生硬之感；而最特别的是分形的对称，它既不是左右对称也不是上下对称，而是画面的局部与更大范围的局部的对称，或说局部与整体的对称。在分形图中更

多的是分叉、缠绕、不规整的边缘和丰富的变换，它给我们一种纯真的追求野性的美感，一种未开化的、未驯养过的天然情趣。信息理论的心理学和美学指出，和谐的布局、平衡、对称等在信息论意义上的所有有序的原理，都是使艺术作品容易理解而令人有清晰印象的效果的原因。但是现代艺术的研究指出，只求满足美的经典定义并不能产生真正的艺术作品，一件真正的艺术作品还要能激发兴趣，启迪深思。显然，这些刺激源自“创新”，也就是我们视觉器官看到新的以往没有过的现象时的一种感觉。从这个意义上说，分形几何理论的提出和发展，正在形成一种新的审美理想和一种新的审美情趣。

从分形结构的角度看，分形理论的审美理想既不崇尚简单，也不崇尚混乱，而是崇尚混乱中的秩序，崇尚统一中的丰富。正像贡布里希所说的“审美快感来自于对某种介于乏味和杂乱之间的图案的观赏。单调的图案难于吸引人们的注意力，过于复杂的图案则会使我们的知觉系统负荷过重而停止对它进行观赏。”分形图形的结构是复杂的，它总是有无穷的缠绕在里面，每一个局部都有更多的变化在进行，然而，它却杂而不乱，它里面有内在的秩序，有自相似结构，即局部与整体的对称。这种对称屏弃了欧几里德几何形式的对称给人带来呆板的感觉，整个画面从平衡中寻找着动势，使人处于跃跃欲试的激动之中，同时在深层次上它又有着普遍的对应与制约，使这种狂放的自由不至于失之交臂。

在分形的图形中蕴涵着无穷的嵌套结构，这种结构的嵌套性带来了画面的极大的丰富性，仿佛里面蕴藏着无穷的创造力，使欣赏者不能轻而易举的看出里面的所有内涵。正如法国印象派大师雷诺阿所说的“一览无余则不成艺术”，许多伟大的艺术品都具有这样的特征，如巴黎的艺术宫，它的群雕和怪畜、突角和侧柱、布满旋涡花纹的拱壁和配有檐沟齿饰的正檐，巴黎大剧院也是如此。这类艺术品的典范都有一个共同的特征即没有特定尺度，因为它具有每一种尺度。观察者从任何距离望去都能看到某种赏心悦目的细节，当你走近时，它的构造就在变化，展现出新的结构元素。

经常有人会问，分形图形和分形艺术有何用?

用分形方法在计算机上可实现模拟自然景物、动画制作、建筑物配景等，在影视制作中能生成奇峰异谷、独特场景，产生新奇美丽的景色。著名的鲁卡斯电影公司，在利用分形方法创造出与众不同的景观方面已做了一些开拓性的工作。这体现在影片《杰蒂的轮回》的剧情中，以及《星际旅程Ⅱ：可汗的愤怒》中的许多分形风景画上，其中最著名的是行星起源的演变序列图。而由理查德·沃斯在计算机上制作的分形山已被 IBM 公司广泛地应用于宣传广告中。不仅如此，在美国分形明信片和分形广告在市场上也于 1986 年底首次推出，随后又推出了分形年历和分形贺年卡，甚至在青年人穿的 T 恤衫、街道上的招贴画上也都印上了分形。在学术界，许多世界性刊物如《美国科学家》、《科学》、《自然》、《今日物理》、《研究与发展》、《科学美国人》以及《非线性》等等杂志的封面上或一些著作的封面上都出现过分形图案。在国内，经常可以在公共汽车上看到印有分形图案的棉衣和连衣裙，现在又出现了分形 IC 卡和分形扑克，至于分形用在书的封面设计上也已屡见不鲜。分形图形的错综、美丽和富于表现，不仅唤起科学世界的想像力，同时也使人感受到它们与真实世界之间深奥的关系。

分形图形用途广泛：

① 将高精度分形图形具体应用在建筑设计中，或制作成各种尺寸的装饰画，可以考虑将整面墙壁用一幅分形图装饰；

② 用作包装材料图案，效果新颖；

③ 研究分形建筑陶瓷纹样、分形纺织纹样设计及其印染工艺；

④ 设计分形时装(图 10.2)；

⑤ 将分形图形用于信息加密防伪；

⑥ 印制分形贺卡、明信片和小台历。

分形艺术能启发更多的人开发出更多更好的分形产品，为人类社会创造出更多的财富。

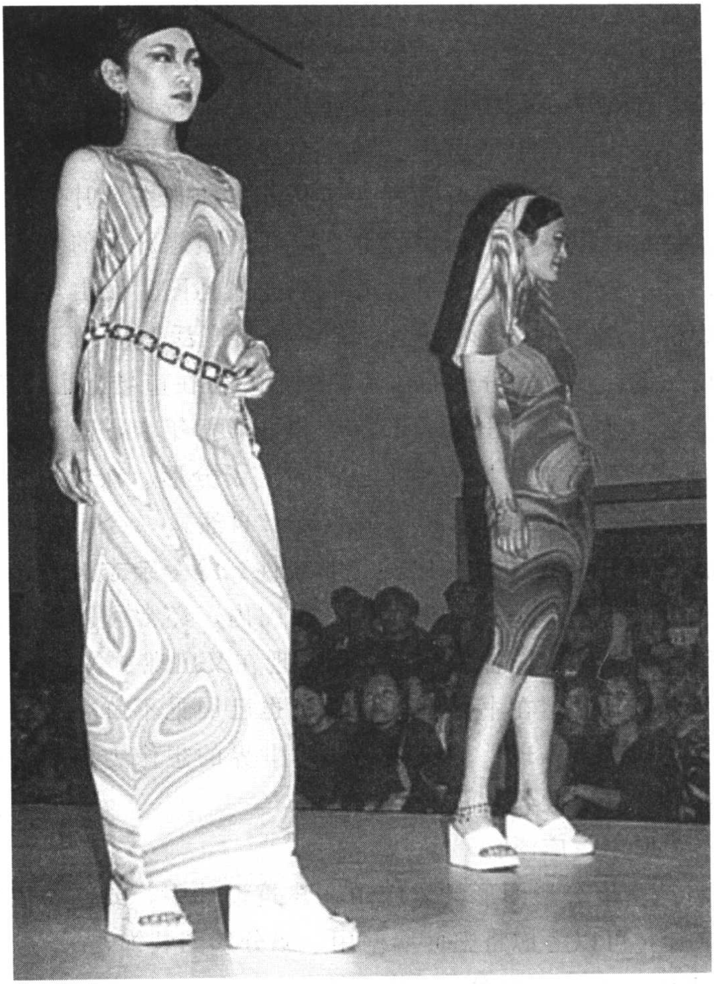


图 10.2　分形图用于服装设计

10.3　分形图像压缩

信息时代带来"信息爆炸"，而这主要体现在信息量的"爆炸"。记 b 为二进制位 bit，B 表示 Byte，则一幅 512 * 512 像素，8b/pixel 的黑白图像占 256 kB；同样一幅彩色图像则占 3 * 256＝768 kB；一幅 2330 * 2230 * 8 bit 的气象卫星红外云图占4.74 MB。这样，一颗

卫星每天(半小时发回一次 5 个波段数据)的数据量为 1.1 GB。在海洋地球勘探方面，一条船每年记录的数据要 15000 盘 0.5 英寸的计算机磁带。可见对数据的压缩存储或传输已成为信息科学非常重要的课题。

大量分形图像的产生，占据了大量的计算机空间，因此分形图像的压缩也是必不可少的。

IFS 可以产生分形，进而发现利用 IFS 码可以进行图像压缩。比如一张 512×512 的黑白色蕨叶，我们用 4 个仿射变换去产生它，每个变换 6 个系数，每个系数占用 32 b，故其 IFS 码占用了 768 个 b。而这幅图像在计算机里占用了 512×512×1=262144 个 b，用 IFS 码作为对蕨叶的压缩编码，则其压缩比高达 341 倍。另外，对一张枫叶(512×512)图像的压缩更高达 1365 倍。而采用 DCT 为核心的方法，其压缩比在 8～20 倍左右，通过精心调整的小波变换方法，也只达到 100 倍左右，可见分形压缩编码在图像压缩中的巨大潜力。

1. 局部迭代函数系统

如果对任一幅图像均采用一个 IFS 去逼近它是很困难的，因为大多数图像不具备严格自相似性。Barnsley 的学生 Jacqain 提出了在对图像划块以后用局部的仿射变换进行压缩，这就是目前常用的方法。

对图像域 D，不妨记为 $I\times I$，其中 $I=[0,1]$。D 上的图像是灰度图像，它实际是二元函数 $z=f(x, y)$。所以当我们说到一幅图像的时候，指的是每个点(x, y)的灰度函数 $f(x, y)$，且 f：$I\times I\rightarrow I$。其中 $f(x, y)=0=$黑色，$f(x, y)=1=$白色。

误差是一种度量，最简单的有两种，一是上确界度量

$$d_{\sup}(f, g)=\sup|f(x, y)-g(x, y)| \tag{10.1}$$

二是均方度量

$$d_{\mathrm{rms}}(f, g)=\left[\iint_{I^2}(f(x, y)-g(x, y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2} \tag{10.2}$$

定理 10.1 空间$(X, d_{\sup})$是完备的。

现在我们把灰度加进映射的第三维：

$$W_i\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_i & b_i & 0\\c_i & d_i & 0\\0 & 0 & t_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_i\\f_i\\o_i\end{bmatrix} \tag{10.3}$$

式中，i 为正整数；t_i 为控制对比度；o_i 为控制变换的亮度。再定义

$$V_i\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_i & b_i\\c_i & d_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_i\\f_i\end{bmatrix} \tag{10.4}$$

由于式(10.3)中惟一敏感的是 z 方向的值，故没有必要对 x 和 y 方向强加一个压缩条件，因而 V_i 可以不是压缩变换。记 $(x, y)\in D_i$，则 $V_i(x, y)\in R_i$，称 D_i 是父块，R_i 是子块，且 $V_i(D_i)=R_i$，这里必须强调的是 $\bigcup R_i = I^2$ 且 $R_i \cap R_j = \varnothing$（当 $i\neq j$）。上述关系见图 10.3。

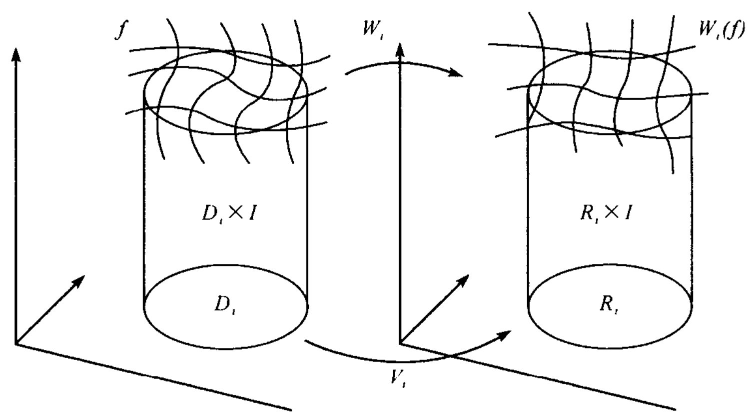


图 10.3　W_i 映射 D_i 上的图形到 R_i 上的图形

记 $W=\bigcup_{i=1}^{N} W_i$ 和 $f=x_\omega$，即我们希望给定的图像 $f=x_\omega$ 的不动点方程是

$$x_\omega=W(x_\omega)=\bigcup_{i=1}^{N} W_i(x_\omega)$$

当然我们得到的仅是逼近解 $f'=x_\omega$，为使 $d_{\mathrm{rms}}(f, f')$尽可能小，这等价于使下列函数极小化：

$$d_{\mathrm{rms}}(f\cap(R_i\times I),\ W_i(f)),\qquad i=1,\ 2\cdots,\ N \tag{10.5}$$

误差极小化见图 10.4 所示。

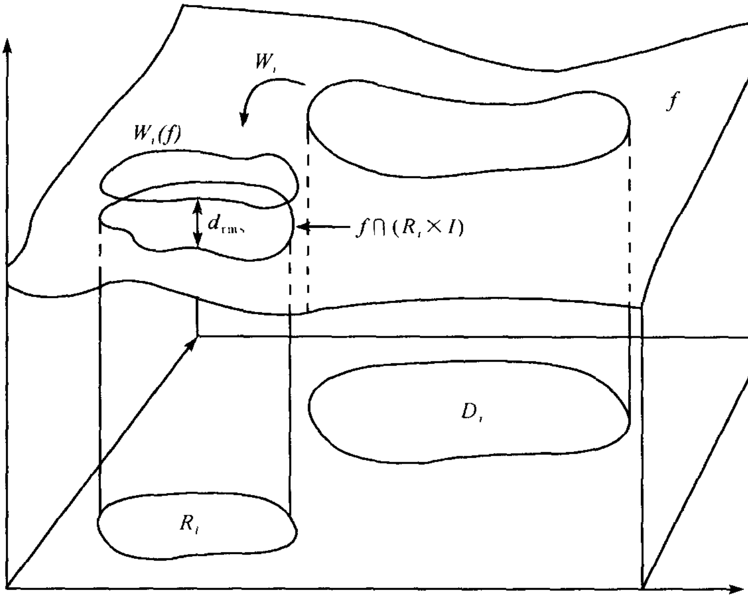


图 10.4　误差极小化示意图

用于在 D_i 中产生 R_i 的 $V_i(x, y)$ 是一种特殊的仿射变换，它几乎仅仅是对 D_i 的一种复制或缩小后的复制，为此特为 V_i 设计了 8 种特殊的变换，称为“反射—旋转”变换，所有这 8 种变换的矩阵均为 2×2 矩阵，如表 10.1 所示。

表 10.1　8 种特殊变换

编　号	矩　阵	意　义
0	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	旋转 0°
1	$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	x 轴方向旋转 180°
2	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$	y 轴方向旋转 180°
3	$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$	旋转 180°

续表

编　号	矩　阵	意　义
4	$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$	旋转至与 $y=x$ 直线对称
5	$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$	逆时针 90°旋转
6	$\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$	逆时针 270°旋转
7	$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$	旋转至与 $y=-x$ 直线对称

于是任一个把 D_t 映射到 R_t 的变换可由这 8 个变换的某一个来操作完成。

为了找出两个仿射变换系数之间的关系，现定义一些操作符如下：

"取块"操作符 $B^J_{K,L}$：它作用于图像 A 后表示在灰阶的图上取出一个三维的块，其底的大小为 $2^J\times2^J$，其第三维，即灰阶函数，取块时连同 $2^J\times2^J$ 的底一起取出来。K，L 表示子块在二维底部左上角的位置，坐标为$(K，L)$。

"放块"操作符$(B^J_{K,L})^*$：$(B^J_{K,L})^*A$ 表示把底部 $2^J\times2^J$ 的三维块插入全 0 的图中，且插入子块的左上角位于$(K，L)$上。把块坐标(块左上角坐标)用大写字母表示，在块内的像素坐标用小写字母$(k，l)$表示。

"平均—抽样"操作符 A_v：把 $2^J\times2^J$ 带有灰阶的图像通过近邻四个像素点灰阶求平均—抽样，变成 $2^{J-1}\times2^{J-1}$尺寸的块。"A_v"操作可用下式表示：

$$(A_vB^J_{K,L})(k,l)=\frac{1}{4}[(B^J_{K,L}A)(2k,2l)+(B^J_{K,L}A)(2k+1,2l)+(B^J_{K,L}A)(2k,2l+1)+(B^J_{K,L}A)(2k+1,2l+1)]$$

通过 A_v 操作，$2^J\times2^J$ 的图变为 $2^{J-1}\times2^{J-1}$的图，其灰阶函数的分辨率也减小，即变得粗糙了。

"反射—旋转"操作符 L_p：是表示块的旋转变换，犹如 IFS 变换中的系数 a，b，c，d。为了简化匹配，把一个正方形子块的旋转化

为最简单的8种方式，即旋转0°，90°，180°，270°和垂直中线反射，水平中线反射和对角反射等这8种固定方式。设 D_j 是一个图像块，它的灰阶函数为

$$\{u_j(i_x, i_y): i_x, i_y=0, 1, \cdots, 2^D-1\}$$

对应的8种变换为：

$L_0: u_j(i_x, i_y)=u_j(i_x, i_y)$　　旋转0°；

$L_1: u_j(i_x, i_y)=u_j(i_x, 2^D-1-i_y)$　　垂直中线反射；

$L_2: u_j(i_x, i_y)=u_j(2^D-1-i_x, i_y)$　　水平中线反射；

$L_3: u_j(i_x, i_y)=u_j(i_y, i_x)$　　对角线 $i_x=i_y$ 反射；

$L_4: u_j(i_x, i_y)=u_j(i_y, 2^D-1-i_x)$　　对角线 $i_x=i_y=2^D-1$ 反射；

$L^5: u_j(i_x, i_y)=u_j(2^D-1-i_y, 2^D-1-i_x)$　　旋转90°；

$L_6: u_j(i_x, i_y)=u_j(2^D-1-i_x, 2^D-1-i_y)$　　旋转180°；

$L_7: u_j(i_x, i_y)=u_j(2^D-1-i_y, i_x)$　　旋转270°。

定义 10.1　设(X, d)是紧度量空间，D 为 X 的非空子集，定义 $W: D \rightarrow X$。如果

$$d(W(x), W(y))\leqslant sd(x, y), \qquad \forall_{x,y}\in D$$

其中 $0\leqslant s \leqslant 1$，则称 W 为(X, d)上的局部压缩映射，s 为 W 的压缩因子。

定义 10.2　设(X, d)是紧度量空间，$W_i: D_i\rightarrow X$ 是(X, d)上具有压缩因子 $0\leqslant s_i\leqslant 1(i=1, 2, \cdots, N)$的局部压缩映射，则

$$\{X; W_i: D_i\rightarrow X, i=1, 2\cdots, N\}$$

为局部迭代函数系统 LIFS(Local Iterated Function System)。实数 $s=\max\limits_i\{s_i\}$称为 LIFS 的压缩因子。

定义 10.3　设 S 表示 X 所有子集的集合，则可以定义算子 $W_{\text{local}}: S\rightarrow S$ 为

$$W_{\text{local}}(B)=\bigcup_{i=1}^{N}W_i(D_i\cap B) \qquad \forall B\in S$$

如果 A 是 X 的非空紧子集且 $W_{\text{local}}(A)=A$，则称 A 是局部 IFS 的吸引子。

为了考虑灰度，我们在定义10.2的基础上把对灰度的映射作为

第三维，就构成了带灰度映射的局部迭代函数系统 LIFSM(Local Iterated Function System with Gray Level Maps)。

2. 分形图像压缩的基本方法

对图像所在的位置$(x, y)\in D$进行划块后得到一些$D_i\in D$，分形图像压缩的基本方法就是 LIFSM，而不管用何种度量去计算误差，敏感的是z方向值，故有下述定义。

定义 10.4 如果$W: R^3\to R^3$是一个映射，满足

$$(x', y', z'_1)=W(x, y, z_1)$$

和

$$(x', y', z'_2)=W(x, y, z_2)$$

并且存在一个正实数$0\leqslant s\leqslant 1$，使得

$$|z'_1-z'_2|\leqslant s|z_1-z_2|, \qquad \forall x'y', z_1, z_2 \text{ 且}(x', y') \text{ 独立于}(z_1, z_2)$$

则称W是z方向压缩的。

定理 10.2 设$F=\{f: I^2\to R^2\}$为I^2的函数图，如果W_1, W_2, …, W_N是z方向压缩的，则算子

$$W=\bigcup_{i=1}^{N}W_i$$

在F中也是z方向压缩的。

证明：设$s=\max\limits_i\{s_i\}$，其中s_i是W_i的压缩因子，令$f, g\in F$，则

$$\begin{aligned}
d_{\sup}(W(f), W(g))&=\sup_{(x,y)\in I^2}\{|W(f)(x, y)-W(g)(x, y)|\}\\
&=\sup_i\{|W_i(x, y, f(x, y))-W_i(x, y,\\
&\quad g(x, y))|: (x, y)\in D_i, i=1, 2, \cdots, N\}\\
&\leqslant\sup_i\{s_i|f(x, y)-g(x, y)|\}\\
&\leqslant s\sup_i\{|f(x, y)-g(x, y)|\}\\
&\leqslant sd_{\sup}(f, g)
\end{aligned}$$

所以$W=\bigcup\limits_{i=1}^{N}W_i$按度量$d_{\sup}$是$z$方向压缩的，由压缩映像定理，在$F$中存在惟一的不动点$f'$使$W(f')=\bigcup\limits_{i=1}^{N}W_i(f')$。

正如我们所言，$s<1$ 是压缩的充分条件，实践证明，当某些 $s_i<1.2$，迭代仍然收敛，这样的 W 称为最终压缩。

方程(10.5)的极小化需做两件事。第一是对于给定的 R_i 要找到一个好的选择 D_i；第二是对 W_i 要找到一个好的对比度 t_i 和亮度 o_i。对于每个 $D_i \in D$，我们用最小二乘回归计算 t_i 和 o_i，给出了均方差回归 e_{rms}，以这个均方差搜寻到 D_i，随着 D_i 和 t_i，o_i 的选定，就确定了方程(10.3)的 W_i。一旦有了 W_1，W_2，$\cdots W_{1024}$，我们也就可以从吸引子 x_ω 去解码。

实践中，我们用的是离散均方差方法去确定 t_i 和 o_i。给定来自 D_i 中的 n 个像素灰阶值 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 和来自 R_i 中的像素灰阶值 b_1，b_2，$\cdots$，b_n。由方程(10.3)，令

$$R = \sum_{i=1}^{n}(t_i\alpha_i + o_i - b_i)^2$$

此式表明，对于 R_i 中的像素灰阶值 b_j，D_i 中是以 $t_j\alpha_j + o_j$ 去对应的。令

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial o} = 0$$

解得

$$t = \frac{n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i - \sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i}{n\sum_{i=1}^{n}a_i^2 - (\sum_{i=1}^{n}a_i)^2} \tag{10.6}$$

$$o = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}b_i - t\sum_{i=1}^{n}a_i\right] \tag{10.7}$$

由此

$$R = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}b_i^2 + t\sum_{i=1}^{n}(a_i^2t - 2a_ib_i + 2o\,a_i - 2o\,b_i) + n\,o^2\right] \tag{10.8}$$

如果式(10.6)的分母为 0，则 $t=0$，均方误差为$\sqrt{R}$。

搜索 D，计算出 t，o 和 R，从而找出使 R 极小的 D_i 为 R_i 的局部映射块。

实践中大部分分形编码的思想为：首先是 R_i 的划分，对每个 R_i 寻找合适的 D_i 到 R_i 时有 rms 误差最小。在确定 D_i 和 R_i 后，也就

确定了 t_i 和 o_i，当然从 D_i 到 R_i 的映射过程里，方程(10.3)中的 W_i 各个系数值 a_i，b_i，c_i，d_i，e_i 和 f_i 也都得到了确定，最后得到了 $W=\bigcup W_i$。

看得出，一个分形图像编码关键在于如何寻找 R_i 和 D_i，两者的匹配，既要精度高又要速度快。目前大致有以下几种方法：

· 四叉树方法。

· HV 划分法。四叉树划分时，每个 R_i 和 D_i 都是单一的方子块，虽有大小之分，但没有形状的差别，也就是没有顾及到图像本身的特点。HV 是一种更为灵活的划分。H 是横向(Horizontally)，V 是纵向(Vertically)，无论是横向划还是纵向划，都把原区域一分为二，而新的较小区域与原来的较大区域在形状上有一定相似性。比如，可以使每个小区域中图像的边大致沿着其对角线方向。

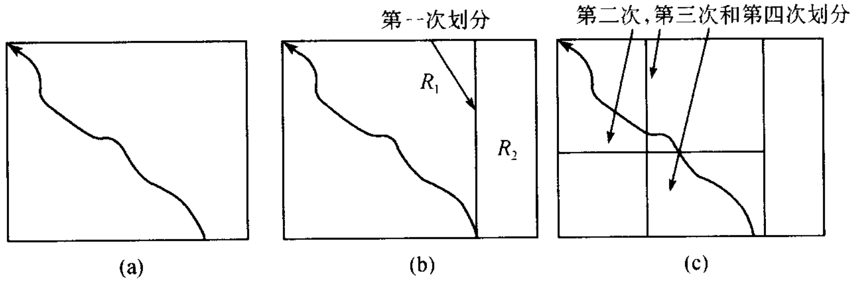


图 10.5　HV 分割

· 三角域方法。

· 多边形域方法。

· 遗传算法。

3. 四叉树方法

考虑到人眼对某些画景的不敏感性，就可预先设置一个误差限，如果计算的误差已小于这个误差限就不必再继续搜索下去，从而节省计算时间。其次，我们可以考虑各种图像本身的特点。若是某个 R_i 代表的是大海的一个小片，那就完全可以从它附近选定一个 4 倍于它的海洋区域为 D_i，且这个 R_i 也不一定要取的很小。

四叉树方法是1991年由Fisher发明的，该方法的出现不仅使分形图像压缩的时间极大地缩短，而且也使压缩倍数大为提高。

四叉树的基本思想是这样的：先把一张方的图像一分为4×4个相同规模的$R_i(i=1, 2, 3, 4)$，随之可令原图像为D_i进行最小二乘计算。如果误差小于规定的ε，则转向下一个R_i，否则划分该R_i为4个更小的相同区域，再从原图像中搜索4倍规模于它的D_i并计算误差。若误差小于ε或该R_i的规模已小于等于规定的最小R_i规模，就停止计算并转向下一个R_i，否则再一分为四。重复刚才的步骤直至把一张图像扫描完毕。图10.6就是一张四叉树的分割思想图。

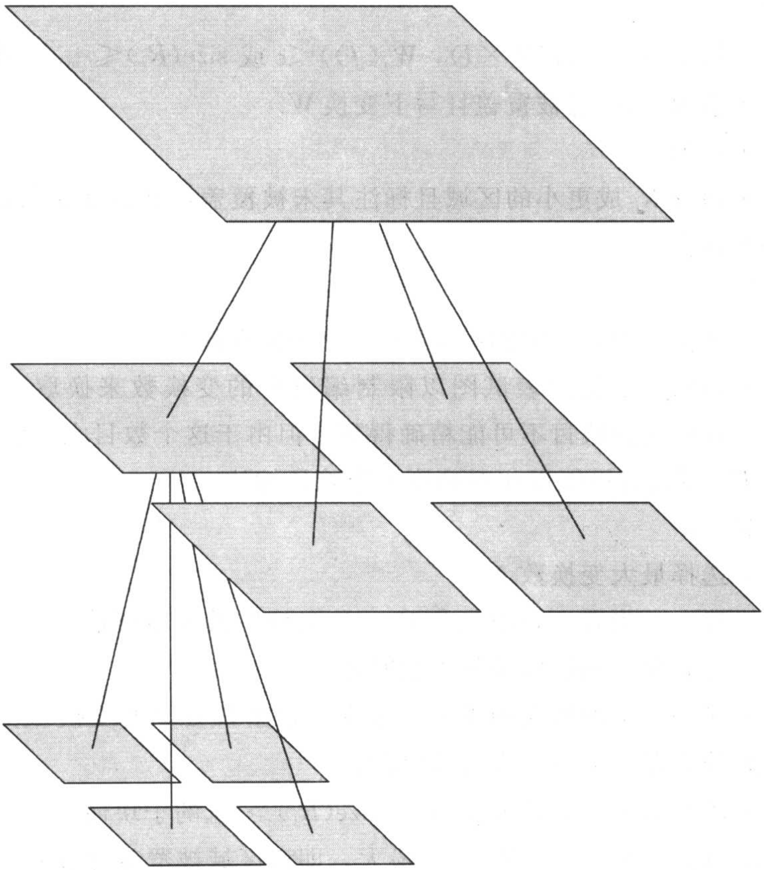


图10.6　四叉树分割思想图

四叉树方法是一种自适应方法，计算中的子块 R_i 规模取决于图像的局部复杂性。对一张固定的图像来说，多一些变换将导致较好的保真度，但会降低压缩比。因此在编制程序时要在保真度与压缩比之间予以折中地选择。下面两个程序伪码分别是偏于保真度与压缩比的。

其一：

· 选择误差限 ε 和小块 R_i 的最小规模 $r_{\min}$

· 令 $R_1 = I^2$ 且标注其未被覆盖

· 当子块 R_i 未被覆盖时做{

· 寻找 D_i 和相应 W_i，使得能最好地覆盖 R_i，即使方程 10.5 极小化

· 如果 $d_{\text{rms}}(f \cap (R_i \times I), W_i(f)) < \varepsilon$ 或 $\text{size}(R_i) \leqslant r_{\min}$，则

· 给 R_i 标注已被覆盖且写下变换 W_i

· 否则

· 划分 R_i 成更小的区域且标注其未被覆盖，并且从未被覆盖的域表中删去 R_i

}

上述伪码中，ε 小则保真度高，否则失真就大。

下面的一个伪码表试图以限制编码中的变换数来换取压缩比。当然，这种变换数目不可能精确得到，但由于这个数目大(几百到几千个 R_j)所以有可能以相对精度去影响压缩比。

其二：

· 选择最大变换数 N

· 建立一张表，表中包含 $R_1 = I^2$ 且注明其未被覆盖

· 当表中有未被覆盖的子块时做{

· 对每个未被覆盖的表中，寻找且储存 $D_i \in D$ 和变换 W_i，以得到最好的覆盖且标注该 R_i 已被覆盖

· 离开域表，寻找 R_j，对于 $\text{size}(R_j) > r_{\min}$ 的子块使

$d_{\text{rms}}(f \cap (R_i \times I), W_i(f))$ 最大，即该区域被覆盖得最差

· 如果表中子块数小于 N 则{

· 把 R_j 划分得更小并注明其未被覆盖且将其加入域表

· 把 R_j，W_j 和 D_j 从表中删除

}

}

· 记下表中所有的 W_j

解码是相对简单的事，对每个 W_j，找到对应的 D_j，缩小其规模(四叉树方法中为 1/4)与 R_j 一般大小，把其上像素的灰阶值乘以 t_i 再加上 o_i 作为 R_i 位置上像素的灰阶值。一般来说，迭代 10 次就足够了，由于不动点与初值无关，因此可令 z_0 为任意值。

为了紧凑地储存这个编码，我们并不是把方程(10.3)中的所有系数都存起来。对比度和亮度有一个非一致分布，这意味着熵压缩的某些形式是很有收获的。t_i 和 o_i 经优化计算后要存起来，如果将这些值量化并储存在一个固定的 bit 数里，比如 $5b$ 存 t_i，$7b$ 存 o_i 大致是最优的。实际上仅量化 t_i 和 o_i 就能使保真度有一个显著的改善。剩下的系数是在解码时被计算的，而存储的仅仅是 R_i 和 D_j 的位置。在四叉树方法中，如果我们知道 R_j 的规模大小，则 R_j 就能通过储存变换的顺序来编码。D_i 是由其位置和规模来标明的(从而也就知道了 R_j 的规模)，但这还不够，由于有 8 种途径映射 D_i 的四个角落到 R_j 的四个角落，因此还必须用 $3b$ 去确定其旋转和反射信息。

下面是当 D_i 的规模大小为 R_i4 倍时，当然包括应用四叉树方法时，计算 $d_{\text{rms}}(f \cap (R_i \times I), W_i(f))$ 的伪码。

· 设 D_i 是映射 W_i 的定义域

· 从 D_i 中取互不交叠的平均为 2×2 的像素子块去形成一个与 R_i 同规模大小的像素集 F_i

· 如果 W_i 包含有旋转或反射，则 W_i 置换 F_i 的像素到新的定位

· 计算 $\sum_{a \in F_i} a$ 和 $\sum_{a \in F} a^2$

· 计算 $\sum_{b \in F_i} b$ 和 $\sum_{b \in F_i} b^2$

· 计算 $\sum_{a \in F, b \in F_i} ab$，当然 a 和 b 必须在两个集合的相同位置才被相乘

· 用上面这些和用于计算 t_i 和 o_i。需注意的是，D_i，R_i，t_i 和 o_i 都是对于同一个指标数 i，不同的子块 R_i 不能反复用某一个父块

· $d_{rms}(f\cap(R_i\times I), W_i(f))=\sqrt{R}$

计算方程(10.6)和(10.7)所得到的 t_i 和 o_i 可看作是对比度和亮度的调节，后者亦称为补偿值。但对某个 W_i 如有 $|t_i|>1$，则映射 W_i 不会是压缩的，所以要及时予以缩小。

由于子块 R_i 的编码是彼此独立进行的，因此解码后的每个子块的边界上不能保证是光滑的，甚至对于有些不连续处，人眼都可能觉察出来。这就有必要对边界进行修饰，一种简易的方法是将两个边界的值加权平均。

4. 自适应合并法

当前分形图像压缩的研究方向主要有两个：一是缩短改善分形图像压缩的时间；二是提高分形图像压缩的压缩比。常见的方法分两类：一是结合神经网络、遗传算法、小波变换、向量量化和 DCT 等数学方法，构造新的分形图像压缩算法。二是改变分块的形状，如用三角形、多边形、HV 等基本图像划块或是它们的组合去刻画待压缩图像。自适应合并法属于第二类，是一种纯分形方法。传统的图像分划技术是先将图像按大尺寸进行分划，若找不到好的父块，则将该分划缩小规模再进行新的父块搜索。合并法的思想恰好相反，它是先进行最小的尺寸分割，对分划后的子块搜索到最好的一个父块分划表，然后根据合并误差的大小，将这些子块进行合并。这种通过合并得到的是不规则的图像分划。子块由边界相邻的小的图像块合并而成，最小的图像块我们称为原子块。这种通过合并小的原子块所得到的分划相对于四叉树等分划方法可以取得明显优越的效果。

首先将待编码图像分割成为一个个单独的原子块，原子块的大小可以人为设定，然后我们对这些原子块进行标准的编码，在编码时，我们记录下每一子块最好的前 d 个码字，接下来通过合并相邻的子块，计算由此产生的误差，选出产生误差最小的邻近子块合并。

通过合并，得到的子块也就越来越小，而每一个子块的编码参数是固定的，从而得到一个好的图像分划，实现高比例的数据压缩。

在这个过程中，不仅要维护图像分划，而且也要维护与之对应的分形码字，在每一次合并之后，都会得到一组新的分形码字，当然，这个分形码字是在通过针对合并后的子块重新进行标准的分形图像压缩过程得到的，略有不同的是，对合并后的子块，其父块我们只在原来的两个子块所对应的父块中选取。每一次合并需要修改的数据如下：

（1）分划：一个相互不重叠的区块集合，该集合覆盖整个图像；每一个区块包含相邻的一些原子块的集合；

（2）对分划的每一个区块：

a. 一个码书列表：$k_1 \cdots k_d$；

b. 每一个码书的优化参数：*rot*（8 种变换之一的编号），*domain*（相应的父块位置），*t*（对比度参数），*o*（亮度参数）。

算法也从如下初始设置开始：

（1）通过将图像分割成为原子块而得到的分划；

（2）对每一个子块（原子块）：码书列表：$k_1 \cdots k_d$ 及其优化参数 *rot*（8 种变换之一的编号），*domain*（相应的父块位置），*t*（对比度参数），*o*（亮度参数）。

（3）计算每个相邻子块合并后所产生的误差。

在经过初始化过程之后，我们开始合并相邻的子块，为了得到与合并后区域相对应的父块，我们只考虑在合并前两个子块对应的父块列表。当然，为了与新的子块相匹配，父块必须相应地扩大。在我们得到的 $2d$ 个码书中，我们仅保存好的 d 个码书及其对应的参数：*rot*（8 种变换之一的编号），*domain*（相应的父块位置），*t*（对比度参数），*o*（亮度参数）。

这种每步选择两个子块合并的策略是无休止的。整个迭代过程以低压缩比和低失真开始，每一次迭代之后得到的分划都会减少一个区块，从而，压缩比在每一次迭代之后都会得到提高，而数据失真都会有所增加，当我们要求的压缩比得到满足或者是失真限达到

之后，系统终止运行。

压缩完毕，将压缩过程中得到的压缩编码输出到编码文件中，在输出参数的时候，我们为了提高磁盘空间的利用率，进一步提高图像的压缩比，考虑到对比度参数和亮度参数都是浮点数，所以可以只输出它们的有效位数数据即可，对解码影响不大的尾数我们采取舍去的策略进行处理，输出文件需要保存的数据如下：

(1) 文件标志；

(2) 原始图像信息(宽、高、颜色(深度))；

(3) 压缩参数信息(原子块宽度、存储对比度参数和亮度参数的位数及编码子块数)；

(4) 图像分划信息(每一子块所包含的原子块的位置)；

(5) 每一子块的编码参数(对比度参数、亮度参数、变换参数及父块位置)；

图像的解码过程与标准的分形图像解码过程相同，按公式

$$z = t_i z + o_i$$

迭代得到。

在整个编码过程中，其算法的核心部分是子块之间的合并，这种合并的主要算法如下：

(1) 选择出进行合并最好的两个子块；

(2) 重新设置合并后新子块的位置等辅助信息；

(3) 重新计算合并后子块的优化参数；

(4) 重新计算相邻子块合并后误差并进行排序；

(5) 产生新的图像分划。

第 1 步选择的依据在于上一次合并中第 4 步重新计算的合并相邻子块产生的误差，为了使下一次合并得以快速的进行，在每一次计算合并误差之后都要对得到的误差列表进行排序，但实际上在这个误差列表中绝大部分的数据项(没有涉及到本次合并及与本次合并的子块不相邻的子块之间的合并误差项)是没有变动的，这就是说，每一次进行排序并不是要对整个列表进行排序，而只是对其中的较少的数据项进行重新排序。这样，每次用在排序上的时间是不多的，

而这又正好保证了下次合并快速、顺利地进行。

第2步中涉及到的辅助信息是为我们编码过程中使用的一些附加的信息，而这些辅助信息在最终迭代完成之后不需要保存到编码文件中。

在第3步中，重新计算合并后子块的编码参数时，我们在搜索其对应的父块的过程中，我们不必重新在父块库中进行搜索，而只需要在原来对应的两个子块码书列表中的相应父块中去搜索，这又大大地节约了编码的时间。

5. 与向量量化的混合优化方法

向量量化VQ(Vector Quantization)是数字信号分析与处理的重要技术，在众多领域包括数字图像压缩，有着广泛的应用。向量量化的定义如下：

定义10.5 若存在映射：$Q: R^k \to C$，其中R^k是k维Euclid空间。

$C=\{y_0, y_1, \cdots, y_{N-1}\}^T$，$y_i \in R^k$，$i \in \Gamma \equiv \{0, 1, \cdots, N-1\}$

则称Q是尺寸为N的k维向量量化器，也就是从R^k到包含N个输出(重构)点的有限集合C的映射。集合C称为码书，C的N个元素称为码字。

向量量化的基本原理是，对于一个输入向量，编码时用码书中与之最匹配的码字的索引来代替，并进行传输和存储。解码时就该索引值对码书查表操作即可。因此一个向量量化器可分为编码器和解码器两部分，编码器E是从R^k到索引集Γ的映射，解码器D是从Γ到码书C的映射，$E: R^k \to \Gamma$，$D: \Gamma \to C$。若干记号：

L_p，$p=0, 1, \cdots, 7$；　　　旋转—反射交换；

A_v^n：将$2^n \times 2^n$的图像块通过邻近的四个像素求平均，变成$2^{n-1} \times 2^{n-1}$的块；

$C_{j,p}=A_v^n(L_p D_j)$；

$\varepsilon(R, D)$：R和D的最小均方误差；

c_I：第I个聚类中心；

n_D：父块 D 的数目；

n_c：聚类中心的数目；

$n_{R\max}$：四叉树上最大分块的子块的数目；

n_{D^l}：尺寸为 $2^l \times 2^l$ 的父块的数目。

在图像压缩中，若将分块图像按逐行，同一行中再按逐列的顺序，将像素的灰度值排成向量，则该向量构成输入向量，经过编解码后的输出向量再按以上的相反过程构成解压图像。采用传统的 VQ 方法进行图像压缩，理论上可以取得较好的压缩率和误差性能，但这是以编码的高度复杂性和资源的巨大占用为代价的，实际上往往不可取。目前使用较多的是一种特殊的乘积码向量量化器，即分离均值/形状-增益向量量化器(MRSG-VQ)。

事实上，分形图像压缩方案和 VQ，尤其是 MRSG-VQ 之间存在着极其相似的地方，有所不同的是，在 VQ 中，所用的码本是从一组训练图像得到的固定码本，而分形方法中，码本来自于待编码图像自身，是自适应的。因此，将两者结合起来编码是可行的。

如前所述，向量量化的编码要用到聚类算法。通常有两种方案：

(1) Fisher 的基于灰度均值分类方案。

令 B 表示图像块库中的一个 $2^n \times 2^n = m$ 块，将 B 分割成左上、右上、左下、右下四个子块，B_1，B_2，B_3，B_4，并直接以，B_i，$i=1, 2, 3, 4$ 记子块的向量值。令 μ_i，Var_i 记第 i 个子块的均值和方差，则

$$\mu_i = \frac{4}{m}\langle B_i, 1\rangle, \quad \mathrm{Var}_i = \frac{4}{m}\langle B_i, B_i\rangle - \mu_i^2$$

式中，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积，按照 μ_i 分布情况可将图像块分为 3 个主类：

$$\text{主类 1：} \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \mu_4$$
$$\text{主类 2：} \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_4 \geqslant \mu_3$$
$$\text{主类 3：} \mu_1 \geqslant \mu_4 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3$$

那么，任一子块或父块，经“旋转—反射”变换总可以使其属于 3 个主类之一。若再根据 Var 的分布情况，则每个主类又可以区分出 24 个副类。故对每一个 B 总共有 $3\times 24=72$ 类。

（2）依距离的聚类分类方案。

如何求最小方差 $\epsilon(R, C_{j,p})$ 的问题，相当于找与 $\phi(R)$ 最接近的 $\phi(C_{j,p})$，将 $\phi(R)$ 称作为 R 的距离特征向量，定义如下：

定义 10.6 令 $n \geqslant 2$，$e = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \cdots, 1) \in R^n$，$E = \mathrm{span}(e)$，$E^{\perp}$ 表示 E 的正交补空间，令 Proj 为沿 E 到 $E^{\perp}$ 的投影算子，$P: R^n \setminus E$，定义规范化正交投影算子 ϕ：$P \to E^{\perp}$，

$$\phi(x) = \frac{\mathrm{Proj}(x)}{\| \mathrm{Proj}(x) \|} = \frac{x - \langle x, e \rangle e}{\| x - \langle x, e \rangle e \|}$$

则 $\phi(x)$ 称作 x 的距离特征向量。

基于这样的思想，在图像编码块匹配过程中，可以将整个 Euclid 空间进行聚类划分，并以每个聚类的中心 c_i，$i = 1, 2, \cdots, n_c$ 作为该聚类的代表，对每个待匹配的子块 R，只搜索比较父块库中特征向量与属于同一个聚类的 $C_{j,p}$，因为同一聚类的特征向量之间的距离较不同聚类之间往往更接近。

但这种做法，在对父块库中各块的聚类特征向量进行聚类分类的时候，考虑的是所有 $2 \times 8\ n_D$ 个父块，这既耗时也占用资源，为了减少待分类父块的数目，可以结合依均值方差分类的方法，其基本思想是搜索 R 的匹配块时，只在主类范围内搜索与 R 同一聚类的父块。

在实际编码时，我们往往采用四叉树的方案。当深度较小时，图像分块较大，则其特征向量的维数也很高，无法计算。因此在处理时，要将分块先降维（例如降到 R^{16} 空间中），再进行搜索，确定候选匹配块，最后再升维恢复到原始尺寸计算最小二乘误差，确定最佳匹配块。

在聚类分类算法中，一个关键的问题是聚类中心如何设计。从 VQ 角度看，这是一个码书设计的问题，可以采用自组织映射的有效方法。

下面分析分形与 VQ 结合的混合方法。

可以看出，码书的尺寸越大，则用 VQ 方法可以获得的图像质量越好，但所需的 bit 数和花费的时间也越大。事实上，码书只需有

限的尺寸就可获得不错的解压图像，这种尺寸 N 一般比父块库中父块的数目 N_D 小很多，因此，用 VQ 方法就比分形方法节约比特数。同时，用 VQ 所需的编解码时间也更少，解码时间降低是因为只要一次迭代过程就行了。

但从另一方面看，分形方法可以弥补 VQ 方法因码字较少引起的误差增大缺陷，而且对有些图像块，比如边缘尖锐的图像块，用分形方法得到的图像质量要比 VQ 好得多。为综合考虑图像压缩的压缩率和信噪比指标，有必要将两者结合起来。

在前面的预处理过程中，已经确定了每个 $\phi(C_j)$所属的聚类。再对当前待匹配的子块 R，确定 $\phi(L_R R)$所属聚类的中心 $c(R)=\Omega^1(\phi(L_R R))$。

若用 $C(R)$ 来近似 R，计算最小均方误差 $\min\limits_{t,o\in R}\| L_R R-(t\cdot c(R)+o\cdot 1)\|_2^2$，将得到的 t，o 量化，得到量化值 $\bar{t}(R)$，$\bar{o}(R)$，重新计算误差

$$
\begin{aligned}
& d(R,\ \bar{t}(R),\ \bar{o}(R)c(R),\ L_R^{-1}(R)) \\
&= \| R-(\bar{t}(R)L_R^{-1}(R)c(R)+\bar{o}(R)\cdot 1)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

这是采用 MRSG -VQ 方法编码，$R\approx\bar{t}(R)L_R^{-1}(R)c(R)+\bar{o}(R)\cdot 1$；若采用分形方法编码，则按照前述的聚类分类方案在 $\Omega^k(\phi(L_R,\ R))$，$k=1,\ 2\cdots,\ q$ 里搜索 R 的最佳匹配父块 $D(R)$，并量化 t，o 为 $\bar{\bar{t}}$，$\bar{\bar{o}}$，得 $R\approx\bar{\bar{t}}(R)L_R^{-1}L_{D(R)}+\bar{\bar{o}}(R)\cdot 1$。混合算法要求按照某种准则来确定编码 R 的方法。

混合算法中需要记录的主要数据包括：

指示所用的方法是分形还是 VQ；

子块的 R 位置；

$c(R)$的索引值或 $D(R)$的位置；

对比度因子 $t(R)$和亮度因子 $o(R)$；

四叉树的深度；

“旋转—反射”变换的标号。

在混合算法中，若对比度因子 t 为零，则 R 的位置、$c(R)$或 $D(R)$的位置都不必存储，而且误差形式也将变为 $\| R-o\cdot 1\|_2^2$，所需的 bit 数与 t 不为零时有较大差别，有必要单独分离出来看作分

形、VQ以外的第三种方法，称作均值方法。

最后就可以按照目标函数最优化的准则来确定编码方法了，优化的过程可以是一种先横向再纵向优化的交错方案。这里略去不讲。

总的算法描述：

(1) 预处理。

设 n_{D^l} 表示尺寸为 $2^l\times 2^l$ 的父块 D_j^l 的数目，对于每个

$$D_j^l,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n_{D^l},\ l=3,\ \cdots,\ l_{\max}。$$

(ⅰ) 降维，$C_j^l=A_v^3A_v^4\cdots A_v^l(L_{D_j^l}D_j^l)$；

(ⅱ) 确定 $\phi(C_j^l)$的聚类。

(2) 对四叉树结构上每个 $2^n\times 2^n$ 子块R^n，$n\in\{2,\ 3,\ \cdots,\ n_{\max}\}$。

(ⅰ) 降维，$r^n=A_v^3A_v^4\cdots A_v^n(L_{R^nR^n})$；

(ⅱ) 确定与 $\phi(r^n)$邻近的 q 个聚类$\Omega^i(\phi(r^n))$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ q$，其中 $\phi(r^n)$所属聚类的中心为 c_r^n；

(ⅲ) 分别对 R^n 用升维后的 c_{r^*} 进行 VQ 编码、用 $\Omega^i(\phi(r^n))$，$i=1,2,\ \cdots,\ q$ 中的最佳匹配父块进行分形编码和按均值编码，再解优化问题和填充四叉树结构。

(3) 对步骤(2)中获得的四叉树结构纵向优化。

Loop $n=2$ to $n_{\max}-1$

　　Loop $j=1$ to N_{R^n}

　　优化 R_j^{n+1} 和子结点 $R_j^{n+1,i}$，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$，

其中 N_{R^n} 为尺寸 $2^n\times 2^n$ 的子块的数目。

这种方法的灰色图像压缩效果与前述自适应合并法效果差不多。彩色图像则不如合并法。但这种方法编制的程序规模比合并法有显著地减少且计算时间短。

10.4 Fractal for Windows 软件

本节介绍分形几何的一套软件，它可以显示许多美妙的数学分形图案。这些软件都是由研究分形的人主动贡献出来的。1992 年

Tim Wegner 等人利用 Window 作为计算机开发平台，将这些软件加以汇集而成的。“Fractal for Windows”软件装在一块 3.5 英寸的磁盘中，并附有基本的说明，更详细的介绍可以看 Tin Wegner 等编的书《Fractals for Windows》(Waite Group Press，1992)。

假定你有一台计算机，并装有 Windows 平台，不妨试着运行这套软件，把 Fractals for Windowsr 的磁盘插入计算机的 3.5 英寸磁盘驱动器(假定称之为 A 驱动器)。首先，打开计算机的 Windows 程序，在“程序管理器”的“文件”菜单中，单击“运行”命令，然后输入：

A：\ INSTALL　回车

Fractals for Windows 的全部程序将自动安装进计算机。安装完成，显示屏会出现 INSTALL SUCCEEDED 字样，再次回车后，安装工作就全部结束了，这时，在 Windows 的桌面上，出现了图 10.7 的图标。

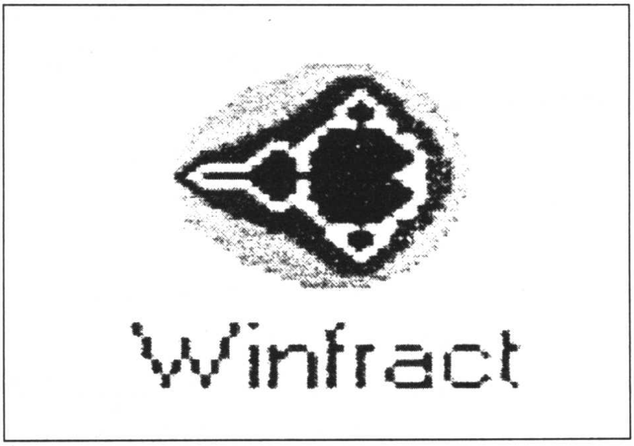


图 10.7　Windows 桌面上的 Winfract 图标

用鼠标左键双击这个图标，就可以运行 Fractal for Windows 软件中的程序

每次运行分形软件时，只需用鼠标在 Winfract 上双击即可。就和 Windows 中运行“主群组”、“附件”等应用程序一样。这时，你可以从软盘驱动器中取出 Fractals for Windows 的软盘了。

双击 Windows 桌面上的 Winfract 图标后，Fractint for Windows 就被打开了。如图(10.8)所示，它一共有 5 个菜单。

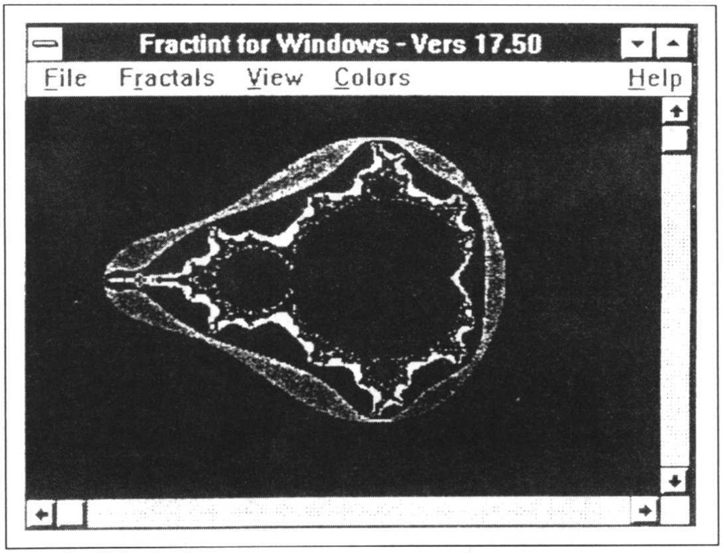


图 10.8 Fractint for Windows 的图窗

图窗包括 5 个菜单，图窗中的图面是 Mandelbrot 的分形图形

"文件(File)"及其下拉菜单可以用来存储、打印、拷贝分形图形，还可以用来调正分形产生的模型参数，并可以由二维分形图形生成三维图形。"分形(Fractals)"菜单中，存放有 78 种由各志愿者贡献的分形图形，你可以任意选看各种图形，并调整模型的参数。下拉菜单"3D Params"可以对分形图形进行旋转、平移等各种运动，下拉菜单"Starfield"可以改变图形的背景。"视图(View)"菜单可以设定产生分形图形的大小，可以对产生的分形图形进行任意的放大和缩小。例如下拉菜单"Zoom In Box"具有放大镜的功能，单击启动这个功能后，鼠标箭头所指之处，代表了放大镜的中心位置，按住鼠标左键不放，由中心位置向外移动，屏幕上会出现一个长方框，这个长方形框内的图形将会被放大，该长方形越小，表示放大倍数越大，松开左键后，长方形框的大小就固定了。这样，放大镜的放大倍数就被确定了，你还可以再次按下鼠标左键不放，拖

着这个长方形的框移动到你感兴趣的部位，于是可以选择图形中任何一个需要放大的部位。最后，在长方形框内任何位置，用鼠标左键双击，该框内的图形就被放大了，这种放大可以无限次地进行下去(图 10.9)。其他另外两个菜单“颜色(Colors)”和“帮助(Help)”

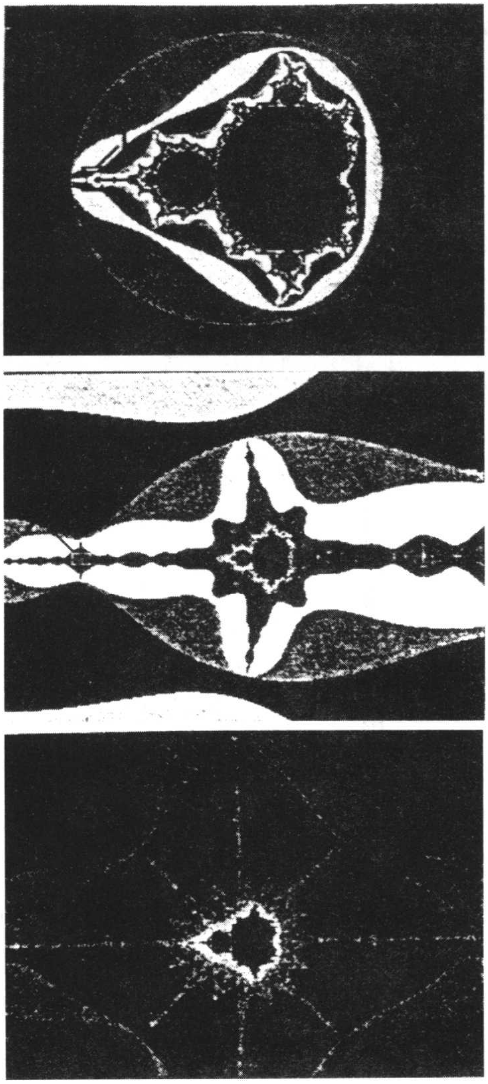


图 10.9　对原始的 Mandelbrot 图形中的小长方框框内的图形进行不断的放大，每个图形给出了 2 次放大后的结果

的用法和 Windows 中常用的菜单一样，这里就不多介绍了。

下面举几个例子来说明这套软件的应用。

例 1 Mandelbrot 集合

为了说清楚什么是 Mandelbrot 集合，以及如何在计算机上显示它，这里分几方面逐步予以介绍。

复数和复平面

在图 10.10 复平面 $x-yi$ 上有复数 Z，

$$Z=x+\mathrm{i}y$$

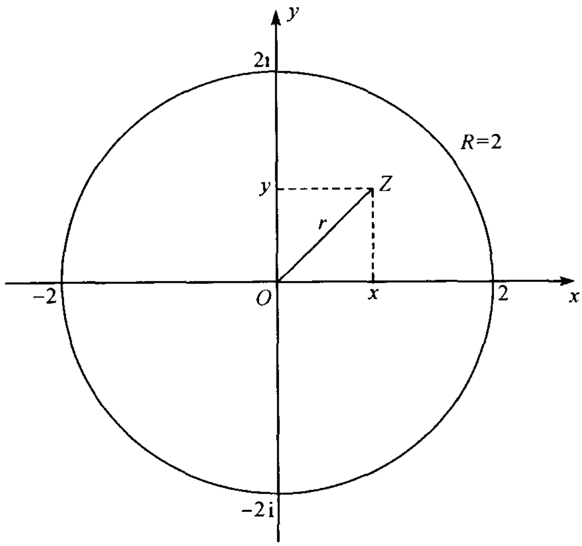


图 10.10 复数 Z 和复平面

显然，Z 距原点 O 的距离 r 是，

$$r=(x^2+y^2)^{1/2} \tag{10.9}$$

Mandelbrot 集合

现在考虑一个变换

$$Z_{n+1}=Z_n^2+C \tag{10.10}$$

式中 C 是复平面中任意一点 C 的复数坐标。我们以原点 O 为中心，半径 2 画一大圆 R，显然，在 R 内有无数多个点，按上面的公式(10.10)取 $Z=0$。计算出 Z_1，计算出 Z_2，依次类推。于是得到一连串的点 Z_0，

Z_1，Z_2，…，Z_n，…，不妨称 $Z_1-Z_2-Z_3-Z_4-\cdots-Z_n-\cdots$这些点的连线为 $Z=C$ 变换的轨迹。Z_n 是第 n 次迭代所得到的轨迹上的一点，它距原点的距离是 $|Z_n|$。下面(表 10.2)给出 $Z_0=0$，和 $C=0.37+0.40\,i$的两种迭代的具体情况。实际上，进行多次迭代后，会出现两种情况：

表 10.2 $Z_{n+1}=Z_n^2+C$ 的迭代试验

$Z_{n+1}=Z_n^2+(0.37+0.4i)$			$Z_{n+1}=Z_n^2+(0.37+0.20i)$		
	实部　虚部	距原点的距离		实部　虚部	距原点的距离
Z_0	0.00+0.00i	$\|Z_0\|=0.00$	Z_0	0.00+0.00i	$\|Z_0\|=0.00$
Z_1	0.37+0.40i	$\|Z_1\|=0.55$	Z_1	0.37+0.20i	$\|Z_1\|=0.42$
Z_2	0.35+0.70i	$\|Z_2\|=0.78$	Z_2	0.47+0.35i	$\|Z_2\|=0.58$
Z_3	0.01+0.88i	$\|Z_3\|=0.88$	Z_3	0.47+0.53i	$\|Z_3\|=0.71$
Z_4	−0.41+0.41i	$\|Z_4\|=0.58$	Z_4	0.31+0.69i	$\|Z_4\|=0.76$
Z_5	0.37+0.06i	$\|Z_5\|=0.38$	Z_5	−0.01+0.63i	$\|Z_5\|=0.63$
Z_6	0.50+0.45i	$\|Z_6\|=0.67$	⋮		
Z_7	0.42+0.85i	$\|Z_7\|=0.95$			
Z_8	−0.17+1.11i	$\|Z_8\|=1.13$	Z_{96}	0.35+0.48i	$\|Z_{96}\|=0.59$
Z_9	−0.85+0.01i	$\|Z_9\|=0.85$	Z_{97}	0.26+0.54i	$\|Z_{97}\|=0.60$
Z_{10}	1.09+0.38i	$\|Z_{10}\|=1.15$	Z_{98}	0.15+0.48i	$\|Z_{98}\|=0.51$
Z_{11}	1.42+1.22i	$\|Z_{11}\|=1.89$	Z_{99}	0.16+0.35i	$\|Z_{99}\|=0.38$
Z_{12}	0.88+3.85i	$\|Z_{12}\|=3.95$	Z_{100}	0.28+0.31i	$\|Z_{100}\|=0.42$

(1) 无限次迭代后(表中对于 $C=0.37+0.20i$ 的情况，已给出了 100 次迭代的结果)，从 Z_1 开始的变换轨迹始终落在 $R=2$ 的圆圈之内，我们把这些起始点用黑颜色表示(图 10.11)；

(2) 由 $Z_1=C$ 出发，迭代若干次后，变换轨迹跑出了 $R=2$ 的大圆圈，我们把这些起始点用白色表示。并把跑出大圆前的最后一次迭代次数称之为逃逸时间(escape-time)，在表 10.2 中 $C=0.37+0.20i$ 对应的 Z_0 点就应是白色的点，该点的逃逸时间是 11，因为第 12 次迭代时，Z_{12}跑到了 R 圆圈之外。

我们把 R 圆内的所有黑色点(当然是无限多个点)的集合就叫做 Mandelbrot 集合。

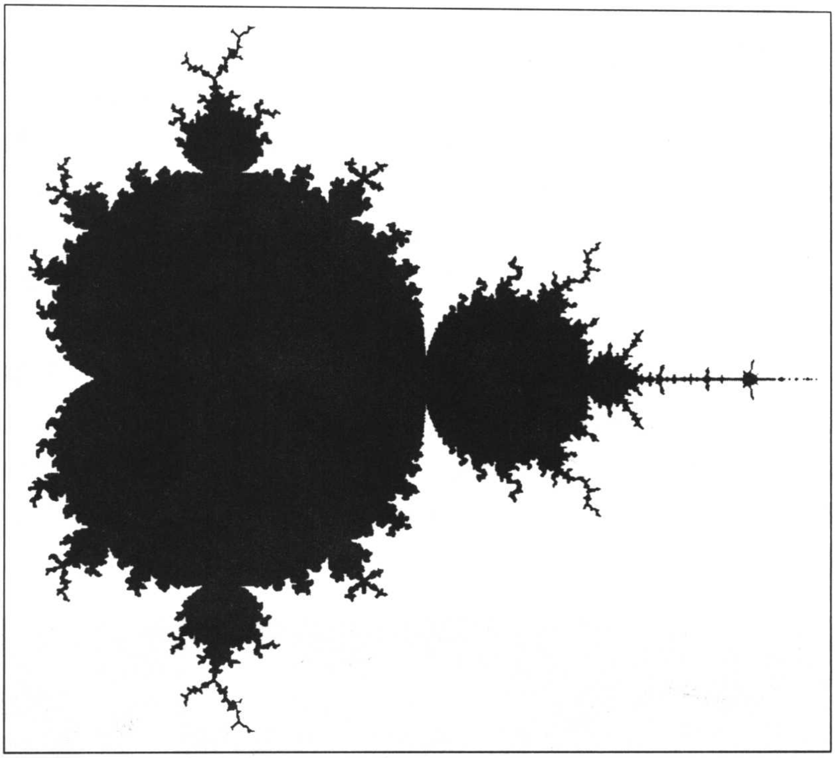


图 10.11　Mandelbrot 集的图形显示

取一个复数，平方，加上原来的数；再平方，再加上原来的数，……，如此一次又一次地继续下去。如果最后的结果在复平面上 $R=2$ 的圆外，则将初始的复数代表的点涂成白色；如果最后的结果在 $R=2$ 的圆内，则点为黑色。所有黑色的点构成了 Mandelbrot 集

彩色和三维显示

Mandelbrot 集合。不仅可以用黑色图形(如图 10.11)来表示，而且还可以用彩色图和三维图来显示。在 R 圆内有无数多个点，我们可以按各点进行 $Z_{n+1}=Z_n^2+C$ 变换时的逃逸时间来赋予各点以颜色或高度数值。例如，设定那些不逃逸的点(即 Mandelbrot 集合中的点)为蓝颜色和高度数值为 1，设定那些很快逃逸的点(即逃逸时间很短的点)为红颜色并令其高度数值为 0，对于各种不同逃逸时间的点赋予不同的值，于是可以得到彩色或三维 Mandelbrot 集合的图形。

复杂性

Mandelbrot 集合在人们面前呈现精美图案的同时，也不遗余力地展开了它的复杂性。生成 Mandelbrot 集合图形的过程是跨越了越来越精细的尺度的一次旅行，集合的细微结构不断增加，它的类似于海岸线的边缘划成许多海马尾巴和小岛屿，与整个集合相似，从最后的结构看，每个方面约放大 100 万倍。用 Mandelbrot 本人的话说，它是一个“魔鬼聚合体”，但无疑它是一幅奇妙无穷的微型画，其中每一个新的更细小的部分都反映了微型画的全貌。

利用计算软件中的 Mande. GIF，读者可以通过多次放大和缩小 Mandelbrot 集的图形(图 10.12)，来仔细研究它的细节，就可以亲身体会到它的精妙之处了。曾有一位 20 世纪 90 年代最受欢迎的科普畅销书作家在了解了这个集合的图形后，把它称作“数学中最复杂的研究对象”。

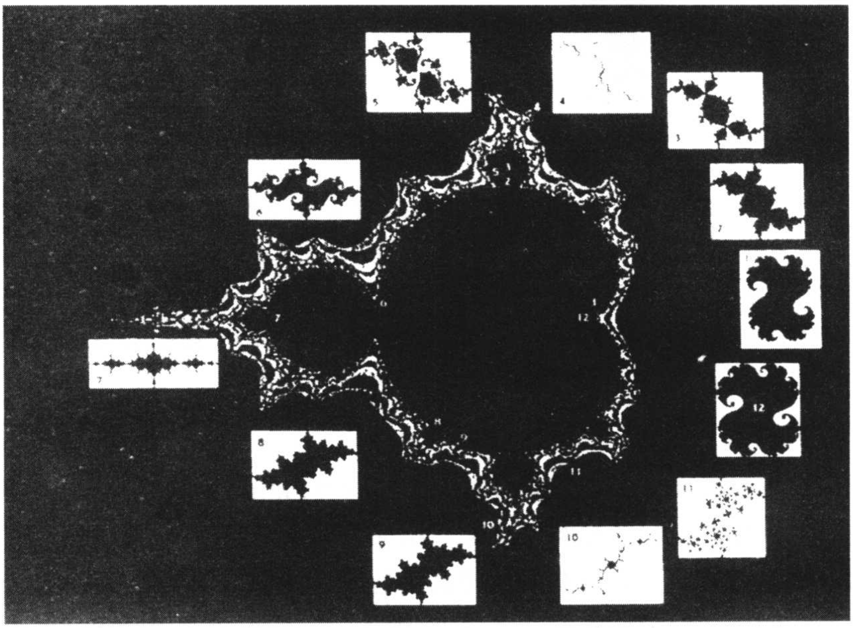


图 10.12　Mandelbrot 集合图形

Mandelbrot 集合是非常复杂的，它包含了无限多个层次，具有千变万化的形态，它可以用作湖泊、海洋线的数学模拟，它也可以用作数据压缩的模型，数学家们称该集合中有研究不完的问题

由一个十分简单的变换公式，得到了如此复杂的分形图形，这其中的关键因素何在？许多人认为，在复杂性的形成方面，除了非线性的变换公式和演化规则外，无数次的变换和长期的演化，也起了极为重要的作用。这就又回到了本书第二章的主题。

例 2 分叉(bifurcation)

在描述人口增长的模型中，有一著名的变换公式：

$$x' = x + rs(1 - x)$$

这个公式最早是 May(1976)在研究昆虫数目变化时提出来的，公式中的 x 变化范围从 0～1，表示总人口中某一部分人所占的比例。横轴 r 是表示人口增长率(growth rate)。在图 10.13 的范围是从 1.9～3.0。人口数目的变化在圈中用纵轴表示，变化范围从 0～1.34。

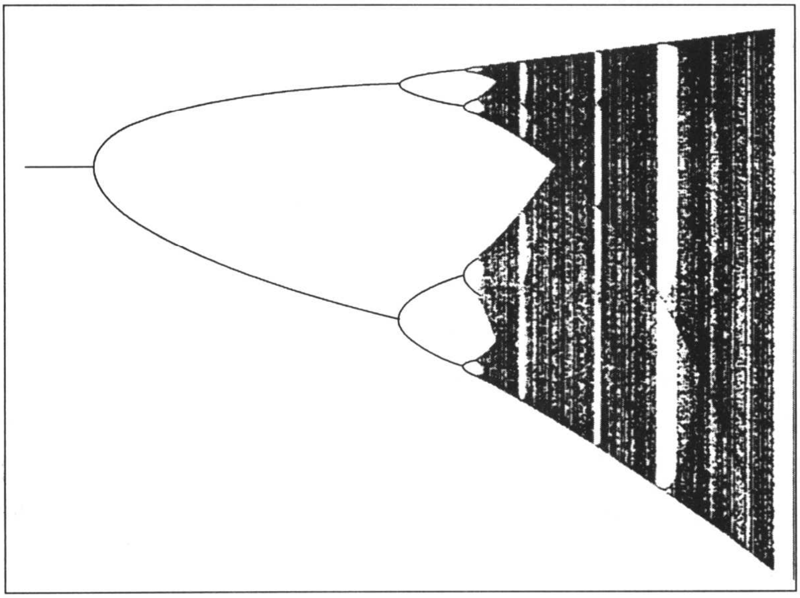


图 10.13 人口数随人口增长方程中参数的变化而呈现周期变化的分岔现象

当增长率 r 值很小时，人口数保持稳定。当 r 逐渐增大到某一个值时，人口数目会在人口峰值和人口低值之间来回变化，而且这

种变化是带有周期性的，即峰值—低值—峰值……，这种周期变化的情况在图 10.13 中表现为一条曲线变为两条曲线，称之为分岔现象。本程序之名即由分岔(bifurcation)得来。当增长率再继续增高时，又一次分岔出现了，两条曲线变成 4 条，再分岔，变成 8 条、16 条等等。为此简单的人口繁衍的遗传密码(二次方程)最终却导致了混沌的产生。

在提供的分岔程序中，事先已设定了迭代次数和最初人口分别为：

迭代次数	1000
初始人口	0.66

读者有兴趣可以任意更改上面的设定，看其演变情况。读者也可以利用程序中的放大功能，研究人口演化过程的细节。

Feigenbaum(1978，1979，1981)仔细研究了 May 提出的这个人口增长方程，他发现了一个奇妙的规律。即每一次分岔对应一个人口增长率 r 值，而这些 r 值之差是几何级数。也就是说，第二个 r 值与第一个 r 值之差正比于第三个 r 值与第二个 r 值之差，如此等等，而这些比值都相等，为 4.669 20。分岔的出现不只是越来越快，而且以恒定速率越来越快。Feigenbaum 又研究了正弦方程，又一次得到 4.699 20 的结果。二次方程(人口方程)与正弦方程是如此不同，而在它们共同的底层却一再重复 4.699 20！Feigenbaum 这个惊人的发现，放之一切函数而皆准确无误得到 4.699 20，这意味着方程并不是最要害的一点，它们与大自然的深层奥秘不无干系，于是大自然的普适性在这个问题上拉开了帷幕。翻腾的水流，摇动的摆，电子振荡器，生物的起起落落……许许多多的物理以及生态系统以不同的方式(方程形式)通向无穷分岔的混沌，却共同蕴藏着一个普适的规律性。Feigenbaum 的工作指引人们走向混沌科学的领域，它唤起了规律性与多样性和谐并存的希望。

例 3 蕨类植物叶子

许多蕨类植物的叶子具有自相似性(图 10.14)，从大叶片拆下一小叶片，小叶片的形状与大叶片完全相似，为了模拟这种叶

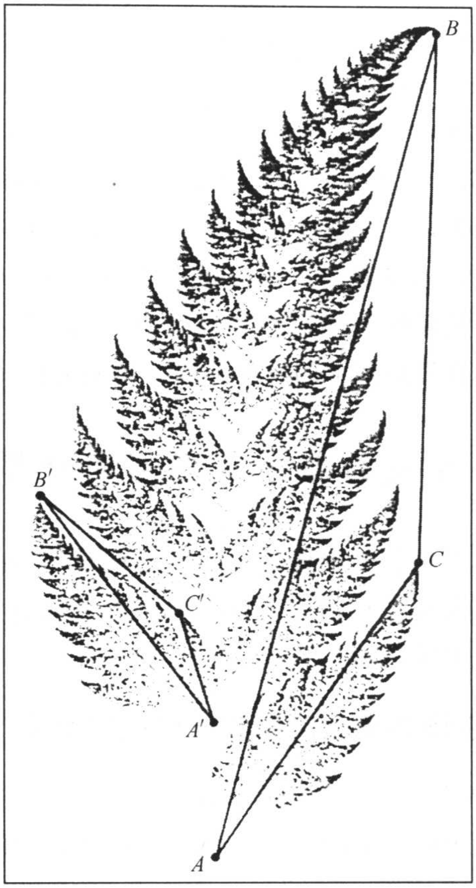


图 10.14 蕨类植物叶子的自相似性

子，Michael Barnsley(1986)发展了一种方法，叫做迭代函数系统方法(Iterated Function Systems)，简称 IFS 方法，它的核心思想，就是第二章中介绍的数学变换方法，生成蕨类植物叶子的变换公式是：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

在 Fractals for Windows 软件中，上述变换公式的缺省值分别设定为：

a	b	c	d	e	f	概率
0.0	0.0	0.0	0.16	0.0	0.0	0.01
0.85	0.04	−0.04	0.85	0.0	1.6	0.85
0.2	−0.26	0.23	0.22	0.0	1.6	0.07
−0.15	0.28	0.26	0.24	0.0	0.44	0.07

有兴趣的读者可以调整这些参数，改变其形状和弯曲的方向。

由这个例子，不难看出，Barnsley 的 IFS 方法使计算机从少量的数据直接生成无限细节的自然景物和高度真实感的复杂画面成为可能，这就为仿真模拟技术的发展开辟了新的途径。

10.5 几个生成典型分形图形的计算机算法

下面我们给出几个生成典型分形图形的计算机算法，这些算法在表述上较多地借助了 C 语言，读者也很容易用自己熟悉的其他计算机编程语言来实现，如 Pascal、Basic 等。

1. 由高斯白噪声积分产生的一维布朗运动

```
ALGORITHM WhiteNoiseBM(X,N,seed)
Title          Brownian motion by integration of white Gaussian
               noise
Arguments      X[ ]   array of reals of size N
               N      size of array X
               seed   seed value for random number generator
Variables      i      integer
BEGIN
    X[0]:=0
    InitGauss(seed)
    FOR i:=1 TO  N-1 DO
          X[i]: =[i-1]+Gauss( )/(N-1)
    ENDFOR
```

END

ALGORITHM InitGauss(seed)

Title	Initialization of random number generators	
Arguments	seed	seed value for random number generator
Globals	Arand	rand ( ) returns values between ( ) and Arand, system dependent
	Nrand	number of samples of rand( ) to be take in Gauss( )
	GaussAdd	real parameter for the linear transformation in Gauss( )
	GaussFac	real parameter for the linear transformation in Gauss( )
Functions	stand( )	initialization of system random numbers

```
BEGIN
    Nrand:=4
    Arrand:=power(2,31)-1
    GaussAdd:=sqrt(3 * Nrand)
    GaussFac:=2 * GaussAdd/(Nrand * Arand)
    srand(seed)
END
```

ALGORITHM Gauss( )

Title	Function retuming Gaussian random number		
Globals	Nrand	number of samples of rand( ) to be take in Gauss ( )	
		GaussAdd	real parameter for the linear transformation in Gauss( )
		GaussFac	realparameter for the linear trans-

```
                                    formation in Gauss( )
Locals               sum            real
                     i              integer
Functions            rand( )        system function for random num-
                                    bers
BECIN
     sum:=0
     FOR i:=1 TO Nrand DO
     sum:=sum+rand( )
    END FOR
    RETURN(GaussFac * sum-GaussAdd)
END
```

2. Mandelbrot 集生成算法

```
ALGORITHM MSetCPM ( Mset, nx, ny, xmin, xman, ymin, ymax,
maxiter)
Title       Mandelbrot set via Continuous Potential Method(CPM)
Arguments   MS et[ ][ ]     output array of real type,size nx by ny
            nx,ny           image resolution in x-and y-direction
            xmin,xmax       low and high x-value of image window
            ymin,ymax       low and high y-value of image window
                            aspect ratio of window is: nx by ny
            maxiter         maximal number of iterations
Variables   ix,iy           integer
            cx,cy           real
Functions   MSetPot( )      returns potential of a point

BEGIN
    FOR iy=0 TO ny-1 DO
         cy:=ymin+iy * (ymax-ymin)/(ny-1)
```

```
        FOR ix=0 TO mx-1 DO
             cx:=xmin+ix * (xmax-xmin)/(nx-1)
             MSet[ix][iy]:=MSetPot(cx,cy,maxiter)
        END FOR
        END BFOR
END
```

```
ALGORITHM MSetPot(cx,cy,maxiter)
Title       Function returning potential of a point
Argumets          cx,cy           point to be tested
                  Maxiter         maximal number of iterations
Variables         iter            interger
                  x,y,x2,y2       point coordinaters and squares
                  temp            real scratch variable
                  potential       real variable,potential

BEGIN
    x:=cx; x2: =x * y
    y:=cy; y2:=y * y
    iter:=0
    WHILE(iter<maxiter)AND(x2+y2<10000. 0)DO
        temp:=x2-y2+cx
        y:=2 * x * y+cy
        x:temp
        x2:=x * x
        y2:=y * y
        iter: =iter+1
    END WHILE
    IF(iter<maxiter)THEN
        potential:=0. 5 * log(x2+y2)/power(2. 0,iter)
```

```
    ELSE
        potential:=0.0
    END IF
    RETURN(potential)
END
```

3. 由迭代函数系生成图像的算法

其中 $w(x, y, r)$即为迭代关系函数。读者可以选择自己感兴趣的迭代关系进行试验，如选择上一节蕨类植物叶子的变换公式：

$$w_r\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$

($r=1, 2, 3, 4$)并按上节给出的参数 a、b、c、d、e、f 以及概率值，就可生成图 10.14 所示的蕨类植物叶子。这其实是基于分形几何理论，用计算机模拟自然景物的一个最简单的例子。

```
ALGORITHM RenderIFS(x,y,P,num,xmin,xmax,ymin,ymax,I,
                    L, M,numcols,seed)
Title     Image rendering of Iterated Function Systems

Arguments  x,y            starting point for iteration
           P [ ]          array of probabilities summing to I[ ][ ]
           num            total number of iterations
           xmin,xmaxs     low and high x-value of image window
           ymin,ymaxs     low and high y-value of image window
           I[ ][ ]        color index output array of size L by M
           L,M            image resolution in x-and y-direction
           numcols        number of colors to be used
           seed           seed value for random number generator
Varjables  k,l,m,n        integer
           Imax           maximum element in I[ ][ ]
           sum            real number
```

Globals	Arand	rand( ) returns values between ( ) and Arand
Functions	srand( )	initialization of random numbers
	rand( )	random number generator
	int( )	integer part of argument
	w(x,y,k)	returns image of (x,y) under w_k

```
BEGIN
    srand(seed)
    Imax:=0
    FOR 1=0 TO L-1 DO
        FOR m=0 TO M-1 DO
            I[1][m]:=0
        END FOR
    END FOR
    FOR n=1 TO num DO
                        /* choose a map wk */
    r:=rand( )/Arand
    sum:P[1]
    k:=1
    WHILE(sum<r)DO
        k:=k+1
        sum:=sum+P[k]
        END WHILE
                        /* apply the map wk */
    (x,y):=w(s,y,k)
    IF(x>xmin AND x<xmax AND y>ymin AND y<ymax)
    THEN
                    /* compute indices of pixel */
    l:=int(L*(x-xmin)/(xmax-xmin))
    m:=int(M*(y-ymin)/(ymax-ymin))
```

```
                    /* increment counters */
        I[l][m]:=I[l][m]+1
        Imax:=max(I[l][m],Imax)
    END IF
END FOR
                    /* compute color values */
    FOR 1=0 TO L-l-1 DO
        FOR m=0 TO M-I DO
        I[1][m]:I=numcols * [I][m]/(Imax+1)
        END FOR
    END FOR
END
```

4. 由迭代生成 Julia 集的 Basic 程序

```
ALGORITHM JuliaIIM( )
Title    BASIC program to compute Julia sets by inverse iterations
INPUT "cx,cy" ,cx,cy
INPUT "x,y",x,y
FOR i=1 TO 6000
     wx=x-cx
     wy=y-cy
     IF wx>0 THEN theta=ATN(wy/wx)
     IF wx<0 THEN theta=3.14159+ANT(wy/wx)
     IF wx=0 THEN theta=1.57079
     Theta=theta/2
     r=SQR(wx* wx+wy* wy)
     IF RND<0.5 THEN r=SQR(r)ELSE r=-SQR(r)
     x=r* COS(theta)
     y=r* SIN(theta)
     m=-5+(x+4)* 500/8
```

```
    n=(2-y)*250/4
    CALL MOVETO(m,n)
    CALL LINE(0,0)
NEXT i
END
```

5. 生成 Cantor 迷宫的 C 语言程序

```
#include <graphics.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

void star1 (int x,int y,int r );
void star2 (int x,int y,int r );

void main( )
{
    int graphdriver,graphmode,x,y,r;
    graphdriver=DETECT;
    initgraph(&graphdriver, $graphmode," ");
    setcolor(LIGHTMAGENTA);
    starl(160,160,80);
    getch( );
    star2(480,320,80);
    getch( );
}

void starl(int x,int y,int r)
{
    If(r>0)
```

```
    {
        starl(x-y,y+r,r/2);
        starl(x+r,y+r,r/2);
        starl(x-r,y-r,r/2);
        starl(x+r,y-r,r/2);
        bar(x-r,y+r,x+r,y-r);
    }
}
void star2(int x,int y,int r)
{
    if(r>0)
     {
         star2(x-y,y+r,r/2);
         star2(x+r,y+r,r/2);
         star2(x-r,y-r,r/2);
         star2(x+r,y-r,r/2);
         rectangle(x-r,y+r,x+r,y-r);
     }
}
```

6. 生成 Lorenz 吸引子的 C 语言程序

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define N 10000
int main(int argc,char * * argv)
   int i=0;
   double x0,y0,z0,x1,y1,z1;
   double h=0.01;
```

```
    double a=10.0;
    double b=28.0;
    double c=8.0/3.0;

    x0=0.1;
    y0=0;
    z0=0;
    for(i=0;i<N;i++){
        x1=x0+h*a*(y0-x0);
        y1=y0+h*(x0*(b-z0)-y0);
        z1=z0+h*(x0*y0-c*z0);
        x0=x1;
        y0=y1;
        z0=z1;
        if(i>100)
            printf("%d%g%g%g\n",i,x0,y0,z0);
    }
}
```

纵观分形几何学的发展道路，不难得出这样的结论：

(1) 分形的研究离不开计算机。如果不是计算机图形显示和图像处理功能的增强，不能想像如何才能直观地看到 Julia 集和 Mandelbrot 集的精细结构，更不能想像怎样可以产生具有无限细节的自然景物和高度真实感的三维动画。反过来，分形理论与方法又极大地丰富了计算机图形学的内容，甚至分形的思想会在计算机科学的发展史上产生一定的影响。

(2) 分形的计算机生成，有重大的应用价值。采用分形生成方法，可以从少量的数据生成复杂的自然景物图像，这使得人们在模拟仿真方面前进了一大步。如果注意到它的反问题，即从给定的自然景物图像提取少量的数据形成原来图像的代码，那么在数据压缩方面便更有实用价值，这就是反问题倍受重视的原因(Barnsley and

Hrue，1993）。

总之，当前关心分形，热衷于分形研究的，除了自然科学工作者，还有不同领域的工程技术人员，以及社会、经济乃至艺术界的人士。分形理论的发展与计算机技术相互促进，使越来越多的人接触并深入到对自然界复杂多样的、奥秘的探索之中。正如美国物理学家约翰·惠勒所说："可以相信，明天谁不能熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人。"

参 考 文 献

专著

敖力布著，1996，分形学导论，呼和浩特：内蒙古人民出版社。

Paul Meakin，本社编译，2000，分形、标度及远离平衡态的增长，北京：清华大学出版社。

陈颙等著，1989，分形与混沌在地球科学中的应用，北京：学术期刊出版社。

陈颙、傅征祥、牛志仁等编著，1992，非线性科学在地震预报中的应用，北京：地震出版社。

陈守吉，张立明著，1998，分形与图像压缩，上海：上海科技出版社。

陈衍仪著，1997，图像压缩的分形理论和方法，北京：国防工业出版社。

高安秀树著，1989，分维数，沈步明，常孜译，北京：地震出版社。

郝柏林著，1993，从抛物线谈起—混沌动力学引论，上海：上海科技教育出版社。

黄润生，2000，混沌及其应用，武汉：武汉大学出版社。

IODP科学规划委员会编著，国家自然科学基金委员会地球科学部、中国大洋钻探学术委员会、同济大学海洋地质教育部重点实验室译，2003.8，地球、海洋与生命：IODP初始科学计划，2003～2013，上海：同济大学出版社。

金以文、鲁世杰著，1998，分形几何原理及其应用，杭州：浙江大学出版社。

李长江著，1999，矿产勘查中的分形、混沌与ANN，北京：地质出版社。

李后强、程光 编，1990，分形与分维，成都：四川教育出版社。

李全林、于渌、郝柏林等编著，1979，地震频度-震级关系的时空扫描，北京：地震出版社。

李水根，吴纪桃，2002，分形与小波，北京：科学出版社。

李水根编著，2004，分形，北京：高等教育出版社。

卢侃、孙建华编译，1991，混沌学传奇，上海：上海翻译出版公司。

刘杰华著，1998，分形艺术，长沙：湖南科学技术出版社。

刘式达、刘式适编著，1993，分形和分维引论，北京：气象出版社。
卢侃、孙建华编译，1991，混沌学传奇，上海翻译出版公司。
茂木清夫著，1984，日本地震预报，北京：地震出版社。
潘金贵著，1998，分形艺术程序设计，南京：南京大学出版社。
齐东旭著，1994，分形及其计算机生成，北京：科学出版社。
屈世显、张建华著，1996，复杂系统的分形理论与应用，西安：陕西人民出版社。
孙博文著，1999，电脑分形艺术，哈尔滨：黑龙江美术出版社。
王东生等著，1995，混沌、分形及其应用，合肥：中国科学技术大学出版社。
汪富泉，李后强著，1996，分形——大自然的艺术构造，济南：山东教育出版社。
王桥等著，1998，地图信息的分形描述与自动综合研究，武汉：武汉测绘科技大学出版社。
吴乐南著，2000，数据压缩，南京：东南大学出版社。
乌洛莫夫著，张诚、张炜、曹可珍等译校，1994，地球动力学与地震预报，北京：地震出版社。
吴敏金著，1994，分形信息导论，上海：上海科学技术文献出版社。
吴忠良著，2000，地震震源物理中的临界现象，北京：地震出版社。
谢和平著，1996，分形——岩石力学导论，北京：科学出版社。
辛厚文著，1993，分形理论及其应用，合肥：中国科学技术大学出版社。
于渌，郝柏林著，1984，相变和临界现象，北京：科学出版社。
赵凯华、朱照宣、黄畇著，1992，非线性物理导论，北京：北京大学非线性科学中心。
赵松年，熊小芸著，1996，子波变换与子波分析，北京：电子工业出版社。
朱令人等著，1999，地震分形，北京：地震出版社。
BENOIT. B. MANDELBROT 著，陈守吉，凌复华译，1998，大自然的分形几何学，上海：远东图书发行部。
Abrams，1997，Fractal Cosmos，1998 Ed，Amber Lotus.
Amber Lotus Publishing，1999，Fractal Cosmos Wall Calendar 2000，Amber Lotus.
Avnir，D.，1989，The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry，Wi-

ley, Chichester.

Barnsley, M. F. , 1988, Fractals Everywhere, Academic Press.

Barnsley, M. F. , Devaney, R. L. , Mandelbrot, B. B. , Peitgen, H. O. , Saupe, D. and Voss, R. F. , 1988, The Science of Fractal Images, Springer-Verlag.

Barnsley, M. F. and Hurd, L. P. , 1993, Fractal image compression, AK Peters, Ltd. , Wellesley, Massachusetts.

Barton, C. C. and Paul. R. La Pointe, 1995, Fractals in Petroleum Geology and Earth Processes, New York, Plenum Press.

Benoit B. Mandelbrot, 2000, Gaussian Self-Affinity and Fractals: Globality, the Earth, 1/F Noise, R/S, New York, Springer-Verlag Incorporated.

Benoit H. Scholz, and Benoit B. Mandelbrot, 1989, Fractals. in Geophysics, Boston Birkhauser.

Bill Hirst and Benoit B. Mandelbrot, 1995, Fractal Landscapes from the Real World, Distributed Art Pub.

Christian Goltz, 1998, Fractal and Chaotic Properties of Earthquakes New York, Springer-Verlag Incorporated.

Christoph Bandt(Editer), Siegfried Graf(Editer), Martina Zahle(Editer), 2000, Fractal Geometry and Stochastics II, Boston Birkhauser.

Christopher Cramer Barton, P. R. La Pointe, 1995, Fractals in the Earth Sciences, Kluwer Academic Publishers.

Clifford A. Pickover, 1995, The Pattern Book: Fractals, Art and Nature, World Scientific Publishing Company, Incorporated.

Crilly, A. J. , Earnshaw, R. A. , Jones, H. (eds), 1991, Fractals and Chaos, New York, Springer-Verlag.

Daniel ben-Avraham Shlomo Havlin, 2000, Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered, Cambridge University Press.

Daubechies, I. , 1992, Ten Lectures on Wavelets, Philadephia, Pennsylvania, Society for Industrial and Applied Mathematics.

Dawn Erdos Janey P. Brand, 1995, Fractal Design Painter, Henry Holt&Company, Incorporated.

Devaney, R. L. , 1990, Chaos, Fractals and Dynamics, Addison-Wesley,

Menlo Park.

Didier Sornette, 2000, Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools, New York, Springer-Verlag Incorporated.

Donald L. L. Turcotte, 1993, Fractals and Chaos in Geology and Geophysics, Cambridge University Press.

Donald L. L. Turcotte, 1997, Fractals and Chaos in Geology 2ND Geophysics 2ND, Cambridge University Press.

Edgar, G. , 1990, Measures, Topology and Fractal Geometry, New York, Springer-Verlag.

Feder, J. , 1988, Fractals, New York Plenum Press.

Froyland, J. , Feder, J. and Jossang, T. , 1988, The Fractal Statistics of Ocean Waves.

Gleick, J. , 1987, Chaos, Making a New Science, New York. Viking.

Gutenberg, B. , Richter, C. F. , 1954, Seismicity of the Earth and Associated Phenomenon, Princeton, Princeton University Press.

Hepting, 1996, Art of Fractals-97, Universe Publishing, Incorporated.

Hurst, H. E. , Black, R. P. and Simaika, Y. M. , 1965, Long-Term Storage, An Experimental Study, London, Constable.

Ignacio Rodriguez-Iturbe and Andrea Rinaldo, 1997, Fractal River Basins: Chance and Self -Organization, Cambridge Umiversity Press.

Jean-Francois Gouyet, 1996, Physics and Fractal Structures, New York Springer-Verlag, Incorporated.

Jeff Berkowitz Lifesmith Fractals, 1995, Fractal Cosmos: The Art of Mathematical Design, Amber Lotus.

Korvin, G. , 1992, Fractal Models in the Earth Sciences, Elsevier, Amsterdam, Netherlands.

Kruhl J. H. (Editor), Jorn H. Kruhl (Editor), Miriam Kupkova, 2000, Fractals and Dynamic Systems in Geoscience.

Lauwerier, H. , 1991, Fractals, New Jersey: Princeton University Press.

Mallat, S. , 1998, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press.

Mandelbrot, B. B. , 1977, Fractals, form, Chance and Dimension, San

Francisco, W. H. Freeman & Co.

Mandelbrot, B. B. , 1982, The Fractal Geometry of Nature, San Francisco, Freeman.

Mclelland, L. , Simkin, T. , Summers, M. , Nielson, E. and Stein, T. C. eds, 1989, Global Volcanism 1975～1985, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Menger, K. , 1928, Dimensions Theorie, Leipzig.

Nigel Lesmoir-Gordon, Ralph Edney, Bill Rood, 2001, Introducing Fractal Geometry, Totem Books.

Nina Siu -Ngan Lam Lee De Cola (Editor), 1993, Fractal in Geography, Prential Hall.

Pachepsky Y. Crawford Walter J. C. Rawls, J. 2000, Fractals in Soil Science, Elsevier Science.

Peitgen, H. O. , Jurgens, H. , and Saupe, D. , 1995, Chaos and Fractal, New York: Springer-Verlag.

Peitgen, H. O. , Jurgens, H. , Saupe, D. , Maletsky, E. , Perciante, T. , Yunker, L. , 1992, Fractal for the Classroom, Strategic Activities, New York: Springer-Verlag.

Peitgen, H. O. and Richter, P. H. , 1986, The Beauty of Fractals, Berlin Springer-Verlag.

Ron Eglash, 1999, African Fractals: Modern Computing and Indigenous Design, Rutgers University Press.

Ruskin, J. , 1860, Modern Painters, vol. 5, Chapter 18.

Russ, J. C. , 1994, Fractal Surfaces, Plenum Press.

Stauffer, D. , 1985, Introduction to Percolation Theory, Taylor and Francis, London.

Stephen Semmes, 2001, Some Novel Types of Fractal Geometry, Oxford University Press, Imcorporated.

Susie Vrobel, 2000, Fractal Time, IAIR1999.

Turcotte, 1992, Fractal and Chaos in Geology and Geophysics, Pergamon Press.

Vicsek, T. , 1989, Fractal Growth Phenomena, London World Scientific.

Vicsek, T., 1992, Fractal Growth Phenomena, 2nd ed., World Scientific, Singaore.

Wegner, T., 1992, Fractals for Windows, Waite Group Press.

Xie, H. P., 1993, Fractals in Rock Mechanics, Balkema.

论文

常旭、刘伊克，1998，hausdorff 分维数识别地震初至走时，地球物理学报，41(6)，826～832。

陈颙、吴如山、陈凌、刘昭军，1997，地震丛集的分形新方法：物理分形，中国地震，13(2)。

陈志耕、刘军伟、孟表柱、贾学民，2000，岩石圈板块的分形及其降维演化，地学前沿，7(1)，109～121。

陈凌、刘杰、陈颙、陈龙生，1998，地震活动性分析中的余震删除，地球物理学报，41(增刊)。

蔡强、周成虎、裴韬、韩志军、汪闽、秦承志，2002，地震时多重分形的时间演化特征研究，地震，(2)。

傅征祥等，1986，全球强震活动性的某些统计特性，地震学报，8(2)。

郝柏林，1983，分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它，物理学进展，3(3)，329～415。

郝柏林，1985，分形和分维，科学，38(1)，9～17。

侯建荣、宋国乡，2002，小波分析在 Hurst 指数估计值中的应用，西安电子科技大学学报(自然科学版)，29(1)，113～118。

孔繁臣、丁国瑜，1991，线性构造分维值的含义，地震，(5)。

李娟、改变时间尺度的 R/S 统计方法及其在地震活动性分析中的应用研究，2000，中国地震局分析预报中心硕士论文。

李娟、陈颙，2001，地震活动性参数的变尺度(R/S)分析，地震学报，23(2)，143～150.

李娟，2001，地震的分形特征及 RS 标度不变性，自然杂志，(4)。

王安良、杨春信，2003，评价奇怪吸引子分形特征的 Grassberger-Procacci 算法，物理学报，51(12)，2719～2729。

汪品先，2003，我国的地球系统科学研究向何处去？地球科学进展，18(6)，1～15。

王炜，1987，华北地区五次中强震前地震危险度 D 值的异常变化，地震，(1)。

王炜、刘震华，1987，地震时间间隔的统计分布及其地震危险度 D 值在华北大震前的异常变化，地震学报，2(2)。

谢和平，1994，岩石节理的分形描述，岩土工程学报，17(1)，18～23。

谢和平，1994，当代力学新的发展方向——分形力学，21 世纪中国力学研讨会论文集，31～33。

谢和平，1996，分形理论在采矿科学中的应用与展望，科学中国人，(12)，4～8。

谢和平，1998，岩石力学中的分形研究，摘自《科技进步与学科发展》。

邢丽君，2002，论分形理论的应用和研究方向，松辽学刊(自然科学版)，(1)，46～48。

赵春艳、谷峻松，2001，地震波的分形特性，辽宁工程技术大学学报(自然科学版)，(04)。

周胜，2004，浅谈分形，现代物理知识，2004，16(1)，26～28。

朱令人、周仕勇、杨马陵、洪时中、龚宇清、王海涛，2000，地震时间序列多重分形计算精度估计，中国地震，(2)。

AZki, K., 1981, A probabilistic synthesis of precursory phenomena, in Earthquake Prediction, ed. by Simson, D. W., and Richards, P. G., AGU, Washington, D. C., 566～574.

Bak, P. and Tang, C., 1988, Self-organized criticality, Phys. Rev., A38, 364～374.

Bak, P. and Tang, C., 1989, Earthquakes as a self-organized critical phenomenon, J. Geophys. Res., 94.

Barnley, M. and Denko, S., 1986, Iterated function system and the global construction of fractals, Proc. of Royal Soc., London, A399, 243～275.

Barton, C. C. and Hsieh, P. A., 1989, Physical and hydrologic-flow properties of fractures, 28th international geological congress field trip guidebook T385, American Geophysical Union, Washington, D. C.

Ben-Zion, Y. and Sammis, C. G., 2003, Characterization of Fault Zones, Pure and Applied Geophysics, vol. 160, No. 3～4, 677～715.

Bermett, J. G., 1936, Broken coal, J. Inst. Fuel, No. 10, 22～39.

Brown, S. R. and Scholz, S. H. , 1985, Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces, J. Geophys. Res. , 90, 12575～12582.

Bufe, C. G. and Varnes, D. J. , 1993, Predictive modeling of the seismic cycle of the Greater San Francisco Bay Region, J. Geophys. Res. , 98, B6, 9871～9883.

Cantor, G. , 1872, Uber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen, Mathematische Annalen, 5, 123～132.

Chen Yong, *et al.* , 1997, A new fractal approach to the clustering of earthquake: physical fractal, Bull. Seism. Soc. Am.

Christopher C. Yang, Fu Lee Wang, 2003, Fractal Summarization: summarization based on fractal theory, ACM Press, 391～392.

Coifman, R. R. and Wickerhauser, M. V. , 1992. Entropy-based algorithms for best basis selection, IEEE Trans. Info. Theory, vol. 38, No. 2, 713～718.

Czirok A. , Sormfai E. , Vicsek T. , 1997, Fractal scaling and power-law landslide distribution in a micromodel of geomorphological evolution, International Journal of Earth Sciences, vol. 86, No. 3, 525～530.

Daizhi Lui, Ke Zhao, Hongxing Zou, Juan Su, 2000, Fractal analysis with applications to seismological pattern recognition of underground nuclear explosions, Signal Processing, vol. 80, Issue: 9.

Dongping Wei, Qi-fu Chen. 2002, Implicit randomness in earthquakes, Geophys. Res. Lett. 29(8), 10. 1029/2001GL013795.

Dorfman, J. R. , 2002, Fractal structures in the phase of simple chaotic systems with Transport, Lecture Notes in Physics, Volume 597 193～212.

Erwin D. , Haroldo F. de C. V, Fernando M. R, 2003, Isothermal and natural convection flows in fractal cavities, Applied Numerical Mathematics, vol. 47, 407～419.

Feigenbaum, M. J. , 1978, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, Statistical Physics, 19, 25～52.

Feigenbaum, M. J. , 1979, Metric properties of nonlinear transformations, Statistical Physics, 21, 669～706.

Feigenbaum, M. J. , 1981, Universal behavior in nonlinear systems, Sci-

ence, 1, 4～27.

Feller, W. , 1951, The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables, Ann. Math. Stat. , 22, 427～432.

Fluigeman, R. H. and Snow, R. S. , 1989, Fractal analysis of long-Range palaeoclimatic data: Oxygen isotrope record of pacific core V28-313, Pure Appl. Geophys. , 131, 307～313.

Fox, C. G. , 1989, Empirically derived relationships between fractal dimension and power law from frequency spectra, Paghoph, 131, 307～313.

Fox, C. G. and H. , D. E. , 1985, Quantitative methods for analysing the roughness of the seafloor, Rev. Geophys. , 23, 1～48.

Frechet, M. , 1941, Sur la loi de repartition de certaines grandeurs geographiques, J. Soc. Stat. Paris, 82.

Frisch, U. , Salem, P. L. and Nelkin, M. , 1978, A simple dynamical model of intermittent fully development trubulence, J. Fluid. Mech. , 87.

Fujisaka, H. and Mori, H. , 1979, A maximum principle for determining the intermittency exponent of fully developed steady trubulence, Prog. Theor. Phys. , 62, 54～60.

Fujiwara, A. , Kamimoto, G. and Tsukamoto, A. , 1977, Destruction of basaltic bodies by high-velocity impact, Icancs, 31, 277～288.

Gabor, D. , 1946, Theory of Communication, J. Inst. Electr. Eng. , London, 93(III), 429～457.

Geilikman, M. B. G. , and Pisarenko, V. F. , 1990, Multifractal patterns of seismicity, Earth and Plan. Sci. Lett. , 99, 127～132.

George Contopoulos, 2003, Order and Çhaos in Astronomy, Lecture Notes in Physics, Volume 626, 3～29.

Goltz, C. , 1997, Fractal and chaotic properties of earthquakes. Springer-Verlag, Berlin.

Grassberger, P. , 1983, Generalized dimensions of strange attractors, Phys. Lett. , 97A, 227～230.

Hirata, T. , 1989, Fractal dimension of fault systems in Japan: Fractal structure in rock fracture geometry at various scales, Pure Appl. Geophys. , 131, 157～170.

Hammersley, J. M. , 1983, Origins of percolation theory, In: G. Peutscher, R. zallen and J. Adler (Editors), percolation Srtuctures and Processes, Ann. Isr. Phys. Soc.

Hack, J. T. , 1957, Studies of logitudinal stream profiles in Virginia and Maryland, U. S. Geol. Surv. Prof. Pap. , 294-B, 46～94.

Harte, D. , 1998, Dimension estimates of earthquake epicentres and hypocentres, Journal of Nonlinear Science, vol. 18, No. 6, 581～618.

Hashimoto, C. , Matsu'ura M. , 2002, 3-*D* simulation of earthquake generation cycles and evolution of fault constitutive properties, Pure and Applied Geophysics, vol. 159, No. 10, 2175～2199.

Hausdoff, F. , 1919, Dimension and ausseres mass math. , Annalen, 79, 157～179.

Hentschel, H. G. E. and Procaccia, I. , 1984, Building blocks of percolation clusters: volatile fractals, Phys. Rev. Lett. , 53, 1121～1124.

Hentschel, H. G. E. and Procaccia, I. , 1984, Relative diffusion in turbulent media; the fractal dimension of clouds, Phys. Rev. , 29, 1461 ～ 1470.

Hentshel, H. G. E. and Procaccia, I. , 1983, The finite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, Physica, 8D.

Hewett, T. A. , 1986, Fractal distributions reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport, society of Petroleum Engineers Paper 15386, 15.

Hilbert, D. , 1891, Uber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flachenstuck, Mathematische Annalen, 38, 459～460.

Hirabayashi, T. *et al.* , 1992, Multifractal analysis of earthquakes, Pageoph, 138, 591～610.

Hirata, T. , 1987, A correlation between the b-valae and the fractal dimension of earthquake, Proceedings of the 7th Japan symp. of rock mech.

Hirata, T. , 1991, Multifractal analysis of spatial distribution of microearthquakes in the Kanto region, Geophys. J. Int. , 107, 155～162.

Hurst, H. E. , 1951, Long -term storage capacity of reservoirs, Trans. Am. Soc. Civ. Eng. , 116, 770～808.

Jaffard, S. , 1997 Multifractal formalism for functions parts I and II, SIAM J. of Mathematical Analysis, 28(4), 944～998, .

John B. Rundle, William Klein, Kristy Tiampo, 2003, Strategies for the detection and analysis of space-time patterns of earthquakes on complex fault systems, Lecture notes in Computer Science, vol. 2659, 827～836.

Jones, C. L. , 1996a, Fractal dimension estimation with wavelet packets, Virtual Phys. , Aug. 1, Web: http://www. swin. edu. au/chem/complex/vp/vp07/vp07. html

Jones, C. L. , 1996a, Multifractal scaling with wavelet packets, Virtual Phys. , Sept. 1, Web: http://www. swin. edu. au/chem/complex/vp/vp09/vp09. html

Jones, C. L. , Lonergan, G. T. and Mainwaring, D. E. , 1996, Wavelet packet computation of the Hurst exponent, J. Phys. A: Math. Gen. , 29, 2509～2537.

Jones, C. L. and Jelinek, H. F. , 2001, Wavelet Packet fractal analysis of Neuronal morphology, Methods, 24, 347～358.

Juan Li, Yong Chen, Hongliang Mi, 2002, $1/f^{\beta}$ temporal fluctuation: detecting scale-invariance properties of seismic activity in North China. Chaos Solitons and Fractals , 14 (9), 1487～1494.

Julia, G. , 1918, Memoire sur literation des fonctions rationnelles, J. de Mathematiques Pures ef Appliquees, 4, 47～245.

Kagan, Y. Y. , 1981a, Spatial distribution of earthquakes: the three-point moment function, Geophys. J. R. astr. Soc. , 67, 697～717.

Kagan, Y. Y. , 1981b, Spatial distribution of earthquakes: the four-point moment function, Geophys. J. R. astr. Soc. , 67, 719～733.

Kagan, Y. Y. and Knopoff, L. , 1980, Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function, Geophys. J. R. astr. Soc. , 62, 303～320.

Kagan, Y. Y. and Knopoff, L. , 1981, Stochastic synthesis of earthquake catalogs, J. Geophys. Res. , 86, 2853～2862.

Kanamori, H. and Anderson, D. L. , 1975, Theoretical basis of some empirical relations in Seismology, Seis. Soc. Am. Bull. , 65, 1073～1096.

Kent, C. and Wong, J., 1982, An index of littoral zone complexity and its measurement, J. Fish. Aquat. Sci., 39, 847～853.

King, G., 1983, The accommodation of large strain in the upper lithosphere of the earth and other solids by self-similar fault systems: the geomerical origion of bvalue, Pageoph, 121, 761～815.

Kossobokov, V. G. and Keilis-Borok, V. I., 2000, Implications of a statistical physics approach for earthquake hazard assessment and forecasting, pure and Applied Geophysics, vol. 157, No. 11-12, 2323～2349.

Kruhl, J. H. & Nega, M., 1996, The fractal shape of sutured quartz grain boundaries: application as a geothermometer, International Journal of Earth Sciences, vol. 85, No. 1, 38～43.

Kumagai, T. Kusuoka, S., 1996, Homogenization on nested fractals, probability theory and related fields, vol. 104, No. 3, 375～398.

Kuznetsov A. P. and Sataev, I. R., 1993, Multi-parameter transition to chaos and fractal nature of critical attractors, IFIP, 229～239.

Leighton, F., 1982, A case history of a major rock burst, RI8701, U. S. Bureau of Mines.

Lorenz, E., 1963, Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci., 20, 130～141.

Langdon, W. B., 2004, Global distributed evolution of L-Systems fractals, Lecture Notes in Computer Science, vol. 3003, 349～358.

Leith, J. R., 2003, Fractal scaling of fractional diffusion processes, Signal Processing, vol. 83, Issue11, 2397～2409.

Lindenmayser, A., and Rozenberg, G. (eds), 1975, Automata, Languages, Development, North-Holland.

Liu H. H., 2004, A constitutive-relationship model for film flow on rough fracture surfaces, Hydrogeology Journal, vol. 12, No. 2, 237～240.

Lovejoy, S., 1982, Area-perimeter for rain and cloud areas, Science, 216, 185～187.

Li, T. Y. and York, J., 1975, Period Three implies Chaos, Amer. Math. Monthly, 82, 985～992。

Luca, L. De & Luzio, D. and Vitale, M., 2002, A ML estimator of the

correlation dimension for left-hand truncated data samples, Pure and Applied Geophysics, vol. 159, No. 11-12, 2789～2803.

Menger, K. , 1926, Allgemeine raume und charakteristische Raune, Zweite Mitteilung: "Uber umfassenste n-dimensionale Mengen", Proc. Acad. Amsterdam, 29, 1125～1128.

Mande lbrot, B. B. , 1995, Statistics of natural resources and the law of Pare to, in the book of "Fractals in Petraleum Geology and Earth Processes", ed. by Barton, C. C. , and Paul Pointe, Plenum Press.

Mandelbrot, B. B. , 1967, How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension, Science, 155, 636～638.

Mandelbrot, B. B. , 1985, Self-affine fractals and fractal dimension, Physica Scripta, 32, 257～260.

Mandelbrot, B. B. , 1986, Self-affine fractal sets. In: L. Pietronero and E. Tosatti (Editors), Fractals in Physics, North-Holland, Amsterdam, 3～28.

Mandelbrot, B. B. , 1989, Multifractal measures, especially for the geophysicist, Pageoph, 131, 1/2, 5～42.

Mandelbrot, B. B. , Passoja, D. E. and Paullay, A. J. , 1984, Fractal character of fracture surfaces of metals, Natural, 308, 721～722.

Mandelbrot, B. B. and Van ness, J. W. , 1968, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, Siam Rev. , 10, 422～437.

Mandelbrot, B. B. *et al.* , 1963, A new model for the clustering of errors on telephone circuits, exploitation and research journal of IBM, 7, 224～236.

Mareschal, J. C. , 1989, Fractal reconstruction of sea-floor topography, Paghoph, 131, 197～210.

May, R. M. , 1976, Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature, 261, 459～467.

Menger, K. , 1943, What is dimension? American Mathematical Monthly, 50, 2～7.

Nicolis, C. &Nicolis, G. , 1984, Isthere a climatic attractor? Nature, 311, 529～532.

Norton, D. and Sorenson, S. , 1989, Geometric characteristics of fractured

granite surface, Pageoph, 131, 107～116.

Nagahama, H. , 2000, Micromorphic continuum and fractal fracturing in the lithosphere, Pure and Applied Geophysics, vol. 15, No. 4, 559～574.

Ogata, Y. , 1988, Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes, J. Am. Stat. Assoc. , 83, 401.

Okubo, P. G. and Aki, K. , 1987, Fractal geometry in the San Andreas fault system, J. Geophys. Res. , 92, 345～355.

Oscar Castillo, Patricia Melin, 2003, Application of a new theory of fuzzy chaos for the simulation and control of nonlinear dynamical systems, Systems Analysis Modelling Simulation, vol. 43, No. 7, 847～865.

Peano, G. , 1890, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, Mathematische Annalen, 36, 157～160.

Perrin, J. , 1906, La discontinuite de la matiere, Revue de Mois, 1, 323～344.

Peter H. Handel, Xuewei Hu, Thomas F. George, Laszlo Nanai, Jan, 2005, Fractal Dimension of Quantum 1/f Noise Samples, <Chaos, Solitons & Fractals>, vol. 23, No. 1, 1～4.

Prasad, R. R. , Meneveau, C. and Screenivasan, K. R. , 1988, Multifractal nature of dissipation field of passive scalars in fully trubulent flows, Phys. Rev. Lett. , 61, 74～77.

Purcaru, G. and Berckhemer, H. , 1982, Quantitative relations of seismic source parameters and a classification of earthquakes, Tectonophys, 84, 57～128.

Richa Jain, Rastogi, B. K. Dimri, V. P. , 2003, Fractal dimension of the 1999 chamoli earthquake from aftershock studies in Garhwal Himalaya, Pure and Applied Geophysics, vol. 160, No. 12, 2329～2341.

Robertson, M. C. , Sammis, C. G. et al. , 1995, Fractal analysis of three-dimensional spatial distributions of earthquakes with a percolation interpretation, J. Geophys. Res. , 100, B1, 609～620.

Ruelle, D. and Takens, F. , 1971, On the nature of turbulence, Communications on Mathematical Physics, 20, 167～192 & 23, 343～344.

Sammis, C. G. , Osborne, R. H. , Anderson, J. L. , Banerdt, M. , White.

P. , 1986, Self similar cataclasis in the formation of fault gauge, Pageoph, 124, 53～78.

Selwyn Sacks, I. and Rydelek, P. A. , 1995, Earthquake "Quanta" as an explanation for observed magnitudes and stress drops, Bull. Seism. Soc. Am. , 85, 808～813.

Sato, K. , Isobe, T. , Mori, N. and Goto, T. , 1986, Microseismic activity associated with hydraulic mining, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. , 23, 85～94.

Saleur, H. et al. , 1996, Discrete scale invariance, complex fractal dimensions, and log-periodic fluctuations in seismicity, J. Geophys. Res. , 101, B8, 17661～17677.

Scholz, C. , 1991, Earthquakes and faulting: Self-organized critical phenomena with a characteristic dimension, In: Riste, T. and Shemington, D. (eds), Spontaneous formation of space-time structures and criticality, Kluwer Dordrecht, 41～56.

Schoutens, J. E. , 1979, Empirical analysis of nuclear and high-explosive cratering and ejecta, in Nuclear Geophysics Sourcebook, Rep. DNA OIH-4-2(Def. Nuclear Agency, Bethesda, MD), 55, Part2, Section 4.

Sernetz, M. , Gelleri, B. and Hofman, F. , 1985, The organism as a bioreactor, interpretation of the reduction law of metabolism in term of heterogeneous calays and fractal sturcture, Journal Thoretical Biology, 117, 209～230.

Sierpinski, W. , 1916, Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue detoute courbe donne, C. R. Acad. Paris, 162, 629～632.

Silberschmidt, V. V. , 1996, Fractal approach in modelling of earthquakes, International Journal of Earth Sciences, vol. 85, No. 1, 116～123.

Smalley, R. F. , Chatelain, Jr. , J. L. , Turcotte, D. L. , and Prevot, R. , 1987, A fractal approach to the clustering of earthquakes: application to the seismicity of the New Hebrides, Bull. Seism. Soc. Am. , 77, 1368～1381.

Sornette, D. , Davy, P. , Sornette, A. , 1990, Structuration of the litho-

sphere in plate tectonics as a self-organized critical phenomenon, J. Geophys. Res., 95, 17353～17361.

Stefan Hergarten, 2003, Fractals-pretty pictures or a key to understanding earth processes? Lecture notes in Earth Sciences, vol. 97, 237～256.

Stupak, P. R. and Donovan, J. A., 1988, Fractal analysis of rubber wear surface and debris, J. Mater. Sci., 23, 2230～2242.

Tiwari, R. K. & Lakshmi, S. Sri & Rao, K. N. N., 2004, Characterization of earthquake dynamics in Northeastern India regions: A modern nonlinear forecasting approach, Pure and Applied Geophysics, vol. 161, No. 4, 865～880.

Tchiguirinskaia, I. & Lu, S. & Molz, F. J. & Williams, T. M. & Lavallee, D., 2000, Multifractal versus monofractal analysis of wetland topography, stochastic environmental research and risk assessment, vol. 14, No. 1, 8～32.

Thomas, C. H., Mogens, H. J., Leo, P. K., Itama, P. and Boris, I. S., 1986, Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, Physical Review, A33, 1141～1151.

Tiwari, R. K. & Rao, K. N. N., 1999, Phase space structure, attractor dimension, lyapunov exponent and nonlinear prediction from earth's atmospheric angular momentum time series, Pure and Applied Geophysics, vol. 156, No. 4, 719～736.

Todoeschuck, J. P., Jensen, O. G. & Labonte, S., 1990, Gaussian scaling noise model of seismic reflection sequences: Evidence from well logs, Geophy., 55, 480～484.

Tsai, C. C. P., 1997, Slip, stress drop and ground motion of earthquakes: A view from the perspective of fractional brownian mition, Pure and Applied Geophysics, vol. 149, No. 4, 689～706.

Vasudevan, K. & Li, Q. & Cook, F. A., 1996, Fractals in deep crustal seismic reflection profiles, International Journal of Earth Sciences, vol. 85, No. 1, 44～49.

Volant, P. and Grasso, J. R., 1994, Finite extension of fractal geometry and power law distribution of shallow earthquakes: A geomechanics effect, J. G. R., 99, 21879～21889.

Von Koch, H. , 1906, Une methode geometrique elementaire pour letude de certaines questions de la theorie des courbes planes, Acta Mathematica, 30, 145～174.

Voss, R. F. , 1988, Fractal in nature: From characterization to simulation, in The science of fractal images, H. O. Peitgen & D. Sanpe, eds. 21～70, Springer-Verlag, New York.

Wiener, N. , 1923, Differential-space, J. Math. Phys. , Mass. Inst. Technol. , 2, 131～174.

Weierstrass, K. , 1872, Uber continuirliche Functionen eines reellen Arguments, der fur keinen Werth des letzteren einen bestimmten Diffirentialquotienten bestizen, 1895, Mathematische Werke, Berlin: Mayer and Muller.

Willson, K. G. and Kogut, J. , 1974, The renormalization group and the expansion, Phys. Reps. , 12, 75～200.

Witold Pedrycz, Andrzej Bargiela, 2003, Fuzzy fractal dimensions and fuzzy modeling, Information Sciences: an International Journal, vol. 153, No. 1, 199～216.

Witten, T. A. and Sander, L. M. , 1981, Phy. Rev. , 47, 1840.

Wolfram, S. , 1984, Cellular automata, Nature, 311, 419.

Wotold Dzwinel, David Yuen, Yoshihiro Kaneko, Krzysztof Boryczko, Yehuda Ben-Zion, 2004, Multi-resolution clustering analysis and 3-*D* visualization of multitudinous synthetic earthquakes, Visual Geosciences. (Online First)

Xie H. & Sanderson, D. J. , 1995, Fractal effects of crack propagation on dynamic stress intensity factors and crack velocities. Int. J. Fracture, 74: 29～42.

Xie, H. & Wang, J. and Stein, E. , 1998, Direct fractal measurement and multifractal properties of fracture surface, Physics Letter A, A242: 41～50.

Xie, H. & Wang, J. & Xie, W. , 1997, Fractal effect of surface roughness on the mechanical Behacior of rock joints, Chaos, Solitons & Fractals. , 8(2): 221～252.

Xie, H. & Wang, J., 1999, Direct fractal measurement of fracture surfaces, Int. J. Solids & Struc, 36, 3073～3084.

Xu Y. and Burton, P. W., 1999, Spatial fractal Wvolutions and Hierarchies for microearthquakes in Central Greece, Pure and Applied Geophysics, vol. 154, NO. 1, 73～99.

Yordanov. O. I. & Atanasow, I. S., 2002, Self-affine random surfaces, The European Physical Journal B, vol. 29, No. 2, 211～215.

Zhao, Y., Huang, J., and Wang, R., 1993, The fractal characteristics of meson fracture in compressed rock specimen revealed by SEM investigation, Int. J. Rock Mech. Min Sci., 30, 7, 877～882.

Zhao, H., Hou, J.-R., Shi, B.-L., 2004, Research on similarity of stochastic non-stationary time series based on wavelet-fractal, Journal of Software, 15(5), 633～640.

Zhaohui Li, Liang Zhao, Nei Y. Soma, 2000, Fractal color image compression, IEEE Computer Society, 185～192.

习题参考答案

第一章

1. 部分以某种形式与整体相似的形状叫做分形，如 Koch 曲线；

   一个几何对象，经过 l 倍的变换，得到 N 个原来的对象，则其维数为

$$D=\frac{\ln N}{\ln l}$$

   如 Koch 曲线的分维数为

$$D=\frac{\ln 4}{\ln 3}$$

2. (a) $D=\frac{\ln 2}{\ln 3}=0.6309$ $L=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

   (b) $D=\frac{\ln 3}{\ln 2}=1.585$ $S=\left(\frac{3}{4}\right)^n$

   (c) $D=\frac{\ln 20}{\ln 3}=2.7268$ $S=\left(\frac{8}{9}\right)^n$ $V=\left(\frac{20}{27}\right)^n$

   把第 $n+1$ 次变换的图形放大 l 倍，可得到 l^2-m 个第 n 次变换的图形，根据分维的定义，则有

$$D=\frac{\ln(l^2-m)}{\ln l}$$

3. $D=\frac{\ln 4}{\ln 3}=\frac{\ln 2^2}{\ln 3}=\frac{2\ln 2}{\ln 3}$

4. 如同松柏树枝形状的图形

5. (1) $D=\frac{\ln 9}{\ln 3}=2$

   (2) $D=\frac{\ln 6}{\ln 4}=1.293$

6. $D=\frac{\ln N}{\ln l}=\frac{\ln 6}{\ln 3}$

第二章

1. 形如 Sierpinski 垫片的图形。
2. 如温室效应，使得全球变暖，冰川消融，并改变全球环流。
3. 过程和原理都不一样，但最终结果一样。
4. 略

第三章

1. 略
2. 测量长度正比于$\left(\frac{1}{s^d}\right)$，$s$ 为测量尺度，d 为测量对象分维数，对于英国海岸线，$d>0$，而对于圆，$d=0$。
3. $D=1.2$

   无标度区(30，150)

第四章

1. 不对。

   我们可以用有限的图形表示出分形图形的一般规律，从而表达无限的意思，即使不用全部画出来，也能让人明白其中的规律与含义。
2. 不对。

   分维数的大小是物质的固有属性，对于某一特定的物质，不管以何种方式破裂，其分维数都一样，而且要比较不同物体的破碎程度，应在相同的标度区范围内进行。
3. 每年 7 级地震数目：0.3 次；

   每年 6 级地震数目：2 次；

   每年 0 级地震数目：113 475 次；

   某地发生 7 级地震的重复周期为 400 年。
4. (a) 26^n

   (b) $D=\frac{\ln 26}{\ln 3}$

   (c) $\rho=\frac{m}{V_0}=\frac{V\rho_0}{V_0}=\frac{\left(\frac{26}{27}\right)^n\rho_0}{V_0}=\left(\frac{26}{27}\right)^n\rho_0$

   (设原体积 V_0 为 1 个单位体积)

5. 略

6. 略

第五章

1. $\frac{2\pi^{2H}}{\omega^{2H}} \sim \frac{1}{2\pi}\int s(\omega)\mathrm{d}\omega$

   成立的充分必要条件是

   $$s(\omega)\sim\omega^{-\beta}\text{且}\,\beta=2H+1$$

   对于剖面，$D=2-H$

   对于表面，$D=3-H$

   所以 $\beta=\begin{cases}2(2-D)+1=5-2D\\2(3-D)+1=7-2D\end{cases}$

2. 山脉与谷地的高与宽之比能够产生连续的幂指数频谱，功率谱对数与波数的对数之间呈现了很好的线性关系。

   根据 $\beta=2H+1$ 即可求出高一宽之比值。

3. $\beta=5-2D$，$\beta=1$，

   所以 $D=2$。

   σ 与 T 的关系：$\sigma\sim T^{H}$

   是

4. (1) 略；(2) $R=1$

第六章

1. 多重分形是一个由有限几种或大量具有不同分形行为的子集合叠加而组成的非均匀分维分布的奇异集合，因此，多重分形概念是原始分形概念对于非均匀分形的自然推广。

   (1) 用 α，$f(\alpha)$参数表示的多重分形特征；

   (2) 用 q，D_q 参数表示的多重分形特征。

   若知道 α 和它的谱 $f(\alpha)$，就可以求出 D_q；反过来，若知道 D_q，也可以求出 α 来。

2. 把 $P_1(\varepsilon)\sim\varepsilon^{\alpha}$，$N_{\alpha}(\varepsilon)\sim\varepsilon^{-f(\alpha)}$代入 $x_q(\varepsilon)=\sum\limits_{i=1}^{N}P_i^q=\varepsilon^{\tau(q)}\quad q\in(-\infty,\infty)$得：

   $$x_q=\sum_{\alpha}\varepsilon^{\alpha q-f(\alpha)}$$

由于 ε 很小，则在求和时，矩 x_q 仅当 $\alpha q-f(\alpha)$ 取极小值时贡献最大，由于 α 随 q 不同而变化，故极小值条件为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}[\alpha q-f(\alpha)]|_{\alpha=\alpha*(q)}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}[\alpha q-f(\alpha)]|_{\alpha=\alpha*(q)}>0$$

由上面两式经验求出当 $\alpha q-f(\alpha)$ 取极小值时 α 的值 $\alpha*(q)$ 来。这时 x_q 可以写成

$$x_q \sim \varepsilon^{\alpha*(q)q-f(\alpha(q))}$$

得到：

$$\tau(q)=q\alpha*(q)-f(\alpha*(q))$$

$$D_q=\frac{1}{q-1}[q\alpha^*(q)-f(\alpha*(q))]$$

对上式求微商，可得：

$$\alpha^*(q)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}[(q-1)D_q]$$

3. 略

4. 略

第七章

1. 设水库的进水流量为 $\xi(t)$，水库向下游排水量的年平均值为 $\langle\xi\rangle_\tau$，

$$\langle\xi\rangle_\tau=\frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\xi(t)$$

$X(t)$ 为 t 年份进水量 $\xi(t)$ 与年平均排水量 $\langle\xi\rangle_\tau$ 的积累离差：

$$X(t,\tau)=\sum_{u=1}^{t}\{\xi(u)-\langle\xi\rangle_\tau\}$$

$$R(\tau)=\max_{1\leqslant t\leqslant\tau}X(t,\tau)-\min_{1\leqslant t\leqslant\tau}X(t,\tau)$$

R 表示水库最大蓄水量与最小蓄水量之差，即水库应该具有的库容量。

2. 略

3. 根据 R/S 分析有：

对于百年一遇的洪水：　$R/S\sim(100)^H$；

对于十年一遇的洪水：　$R/S\sim(10)^H$；

两式相比，可得强度之比为 10^H。

4. 略

分形及相关网站

分形频道http://www. fractal. com. cn

分形探索http://www. hrbust. edu. cn

分形展厅http://www. hrbust. edu. cn/xywz/east new/fxzt/

分形艺术http://www. fractal. net. cn

反演集合数学论坛http://mathtr. 8u8. com

数学风景http://maths. easthome. net

设计在线http://dol. yeah. nethttp://dol. cn99. com

电脑绘画展http://www. hrb. ihw. com. cn/info/show/show. htm

世界艺术网http://www. allworldarts. net

中国收藏网http://www. chinese-voices. com/sc

中国摄影网http://www. potographers. com

天文http://aries. 126. com

穷大工作室http://primes. yeah. net/

数学风景http://maths. easthome. net

西窗夜话http://grwy. online. ha. cn/xcyh

反演集合数学论坛http://mathtr. 8u8. com

艺术之泉http://art99. 126. com

Mind-Boggling Fractals http://www. mbfractals. com

Samplehttp://bjyysh. 126. com

Fractal Modeling Tools http://www. shodor. org/master/fractal

The Fractal Microscopehttp://archive. ncsa. uiuc. edu/Edu/Fractal/Fractal Home. html

Sprott's Fractal Gallery http://sprott. physics. wisc. edu/fractals. htm

Ultra fractal http://www. ultrafractal. com

Fractal us http://www. fractaus. com

The Infinite Fractal Loop http://www. fractalus. com/ifl

Fractal Explorer http://www.eclectasy.com/Fractal-Explorer

Fractal Extreme http://www.cygnus-software.com

Fractal World http://www.kcsd.k12.pa.us/~projects/fractal

Revista Fractal http://www.fractal.com.mx

Fractal Domains http://www.fractaldomains.com

Fractal Recursions http://www.fractal-recursions.com

Fractal Vibes http://www.fractal-vibes.com

Fractal Gallery http://web.pinknet.cz/fractal

Fractal Software http://thinks.com/software/fractals.htm

Fractal Images http://www.softsource.com/softsource/fractal.html

Fractal Navigator http://www.ftactal.org

[General Information]
书名=分形几何学　（第2版）
作者=陈颙　陈凌编著
页数=284
SS号=11540363
DX号=
出版日期=2005年02月第2版
出版社=地震出版社

参考文献